

# MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL CONTROL DE GOBIERNO DE BUQUES

Francisco J. Velasco González  
Dpto. Tec. Elec. e Ing. de Sistemas y Automática. Univ. de Cantabria.  
C/ Gamazo nº 1. 39004 - Santander. [velascof@unican.es](mailto:velascof@unican.es)

Teresa M. Rueda Rodríguez  
Dpto. Tec. Elec. e Ing. de Sistemas y Automática. Univ. de Cantabria.  
C/ Gamazo nº 1. 39004 - Santander. [ruedat@unican.es](mailto:ruedat@unican.es)

Eloy López García  
Dpto. CC. y TT. de la Navegación, Máquinas y Construcciones Navales. UPV/EHU.  
C/ María Díaz de Haro, 68. 48920 - Portugalete. Bizkaia. [enplogae@lg.chu.es](mailto:enplogae@lg.chu.es)

Emiliano Moyano Pérez  
Dpto. Matemática Aplicada y CC. Univ. de Cantabria.  
Av. Los Castros s/n. 39005 - Santander. [moyanoe@unican.es](mailto:moyanoe@unican.es)

## Resumen

*En este artículo se introduce el modelado del control de gobierno de buques, tanto las técnicas lineales como las no lineales, planteándose en primer lugar las ecuaciones del movimiento obtenidas a partir de las leyes de Newton y desarrollando un modelo no lineal. A continuación se presentan diversos modelos lineales y lineales con adición de no linealidades, que son útiles en el diseño de reguladores.*

**Palabras Clave:** Movimiento de un buque, gobierno de un buque, modelos matemáticos.

## 1 INTRODUCCIÓN

El uso de la simulación en el diseño de sistemas de control de gobierno de un buque, ha hecho necesario el desarrollo de modelos dinámicos que conservando las principales características de comportamiento, permitan una implementación lo más sencilla posible.

Dinámicamente un barco se puede considerar como un sólido rígido con seis grados de libertad; tres coordenadas para describir los movimientos de traslación respecto a los tres ejes, y otras tres para los respectivos movimientos de rotación.

Para los modelos de gobernabilidad se consideran inicialmente tres grados de libertad, ya que el movimiento se realiza en el plano horizontal. Los modelos no lineales a los que dan lugar según distintas expresiones de las fuerzas y momentos hidrodinámicos, se pueden linealizar en un pequeño intervalo alrededor del estado de equilibrio.

Estos modelos lineales sólo permiten describir el movimiento del buque en línea recta. Si se desea aumentar el intervalo de validez de éstos modelos, es necesario introducir términos no lineales al modelo.

En el caso de buques portacontenedores, o que desarrollen altas velocidades, es necesario considerar el movimiento de balance. Esto da lugar a los modelos de cuatro grados de libertad,

## 2 NOTACIÓN PARA DESCRIBIR EL MOVIMIENTO DE UN BUQUE

El movimiento de un buque en la mar se describe respecto a un eje de referencia inercial. Normalmente se supone que la aceleración de un punto en la superficie de la Tierra afecta muy poco al movimiento con baja velocidad de los vehículos marinos. Así, se puede considerar que un sistema de referencia situado en tierra O es un sistema inercial.

Para representar el movimiento de un buque se necesitan seis coordenadas independientes. Se utilizan tres coordenadas para describir los movimientos de traslación sobre los ejes  $x_B$ ,  $y_B$  y  $z_B$  (avance, desplazamiento lateral y arfada respectivamente), referidos a un sistema de coordenadas móvil situado en el buque  $O_B$ . Otras tres coordenadas describen los movimientos de rotación (balanceo, cabeceo y guiñada respectivamente) del sistema de coordenadas móvil del buque respecto al sistema de coordenadas inercial de referencia situado en tierra O.

En la figura 1 se representan los sistemas de coordenadas y la definición de los movimientos de traslación y rotación del buque.

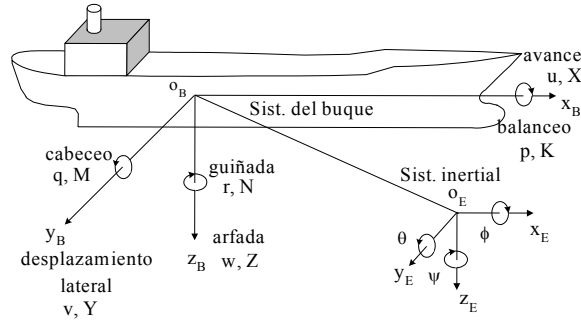


Figura 1: Sistemas de coordenadas con la definición de ángulos y velocidades

El origen del sistema de coordenadas del buque se puede elegir coincidiendo con el Centro de Gravedad (CG) si el CG está situado en el plano principal de simetría. Sin embargo, en general, ésta no es una buena elección porque el CG no está situado en un punto fijo del buque sino que cambia de posición con las condiciones de carga. La opción más utilizada [5] que permite lograr una reducción de la complejidad de las ecuaciones consiste en elegir un sistema de coordenadas ortogonal paralelo a los ejes principales de inercia.

En la tabla 1 se resume la nomenclatura utilizada para describir el movimiento del buque y las fuerzas y momentos. Esta es la notación estándar recomendada en [11] para su utilización en las aplicaciones de maniobra y control de buques.

Tabla 1: Nomenclatura utilizada para describir el movimiento del buque

<b>Traslación</b>	<b>Fuerza</b>	<b>Velocidad lineal</b>	<b>Posición</b>
Avance	X	u	x
Desp. lateral	Y	v	y
Arfada	Z	w	z
<b>Rotación</b>	<b>Momento</b>	<b>Velocidad angular</b>	<b>Angulo</b>
Balanceo	K	p	$\phi$
Cabeceo	M	q	$\theta$
Guiñada	N	r	$\psi$

Las velocidades lineales y angulares, las fuerzas y los momentos se definen normalmente con relación al sistema de coordenadas del buque. Sin embargo, para representar la posición y orientación se utiliza el sistema inercial de referencia. Así, el vector

velocidad respecto al sistema de coordenadas del buque queda definido por:

$$v = [v_1^T, v_2^T]^T \text{ con } v_1 = [u, v, w]^T \text{ y } v_2 = [p, q, r]^T \quad (1)$$

y el vector de posición y orientación respecto al sistema inercial de referencia por:

$$\eta = [\eta_1^T, \eta_2^T]^T \text{ con } \eta_1 = [x, y, z]^T \text{ y } \eta_2 = [\phi, \theta, \psi]^T \quad (2)$$

La derivada del vector de posición y orientación  $\dot{\eta}$  permite describir la trayectoria seguida por el buque. Este vector está relacionado geoméricamente con el vector velocidad  $v$  por la transformación:

$$\dot{\eta} = J(\eta_2)v \quad (3)$$

donde  $J(\eta_2)$  es una matriz de transformación que depende de los ángulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$  [5].

Entonces, las ecuaciones del movimiento del buque con relación al sistema de coordenadas  $O_B$  a partir de las ecuaciones de Newton se pueden expresar en forma vectorial [5] por:

$$M_{RB} \dot{v} + C_{RB}(v)v = \tau_{RB} \quad (4)$$

$$\dot{\eta} = J(\eta_2)v \quad (5)$$

donde  $M_{RB}$  es la matriz de masas e inercia y  $C_{RB}(v)$  es la matriz centrípeta y de Coriolis, ambas debidas a la dinámica del sólido rígido.  $\tau_{RB}$  es un vector generalizado de las fuerzas y momentos externos que está compuesto por [8] las fuerzas y momentos hidrodinámicos producidos por el movimiento del casco en el agua, las debidas a las superficies de control (timones, aletas etc.), las generadas por los sistemas de propulsión y las debidas a perturbaciones ambientales (olas, viento y corrientes).

### 3 ECUACIONES DINÁMICAS CON 3 GRADOS DE LIBERTAD

Para representar el movimiento de un buque en el plano horizontal se suelen utilizar modelos con tres grados de libertad en los que únicamente se consideran los movimientos de avance, guñada y desplazamiento lateral. El resto de movimientos (balanceo, cabeceo y arfada) se consideran despreciables. Si se sitúa el sistema de coordenadas  $O_B$  del buque coincidiendo con los ejes principales de inercia, la ecuación (4) reduce a:

$$M_{RB(3 \times 3)} \dot{v} + C_{RB(3 \times 3)}(v)v = \tau_{RB(3 \times 1)} \quad (6)$$

donde,

$$M_{RB(3x3)} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & mx_G \\ 0 & mx_G & I_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$C_{RB(3x3)}(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m(x_G r + v) \\ 0 & 0 & mu \\ m(x_G r + v) & -mu & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\tau_{RB(3x1)} = [X, Y, N]^T \quad (9)$$

que se suele representar de forma compacta como:

$$\begin{aligned} \text{Avance:} & \quad m(\dot{u} - vr - x_G r^2) = X \\ \text{Desp. lateral:} & \quad m(\dot{v} - ur + x_G \dot{r}) = Y \\ \text{Guiñada:} & \quad I_z \dot{r} + mx_G(ur + \dot{v}) = N \end{aligned} \quad (10)$$

### 3.1 MODELOS NO LINEALES

Existen varios enfoques para el desarrollo de un conjunto de ecuaciones no lineales del movimiento. Cada modelo difiere básicamente en la expresión de las fuerzas hidrodinámicas ( $X$ ,  $Y$ ) y de los momentos hidrodinámicos ( $N$ ) de la ecuación (9) que son complicadas funciones del movimiento del buque. A continuación se presenta una revisión de algunos modelos que se pueden encontrar en la literatura.

#### 3.1.1 Modelo de Abkowitz

En [1] se propone tomar hasta el tercer orden del desarrollo en serie de Taylor de las funciones  $X$ ,  $Y$  y  $N$  alrededor del estado de equilibrio  $u = u_0$  y  $v = r = \dot{v} = \dot{r} = 0$  en la ecuación:

$$\tau_{RB} = f(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \delta) \quad (11)$$

Los términos superiores al tercer orden no se consideran porque la experiencia ha demostrado que su inclusión no aumenta significativamente la exactitud. También se indica que se pueden desprestigiar varios términos debido a la simetría lateral de los buques, a que sólo se tienen en consideración los términos con aceleración de primer orden y a que el acoplamiento entre los términos de velocidad y aceleración es despreciable. Aplicando estas consideraciones a la ecuación (11) resulta:

$$\begin{aligned} X = & X^0 + X_{\dot{u}} \dot{u} + X_u \Delta u + X_{uu} \Delta u^2 + \\ & + X_{uuu} \Delta u^3 + X_{vv} v^2 + X_{rr} r^2 + X_{\delta\delta} \delta^2 + \\ & + X_{rv} rv + X_{r\delta} r\delta + X_{v\delta} v\delta + X_{vuu} v^2 \Delta u + \\ & + X_{rru} r^2 \Delta u + X_{\delta\delta u} \delta^2 \Delta u + X_{rvu} rv \Delta u + \\ & + X_{r\delta u} r\delta \Delta u + X_{v\delta u} v\delta \Delta u \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Y = & Y^0 + Y_u \Delta u + Y_{uu} \Delta u^2 + Y_r r + Y_v v + \\ & + Y_{\dot{r}} \dot{r} + Y_{\dot{v}} \dot{v} + Y_{\delta} \delta + Y_{rrr} r^3 + Y_{vvv} v^3 + \\ & + Y_{\delta\delta\delta} \delta^3 + Y_{rr\delta} r^2 \delta + Y_{r\delta\delta} r\delta^2 + Y_{rvr} r^2 v + \\ & + Y_{rvv} rv^2 + Y_{v\delta\delta} v\delta^2 + Y_{vv\delta} v^2 \delta + Y_{\delta vr} \delta vr + \\ & + Y_{vu} v \Delta u + Y_{vuu} v \Delta u^2 + Y_{ru} r \Delta u + \\ & + Y_{ruu} r \Delta u^2 + Y_{\delta u} \delta \Delta u + Y_{\delta uu} \delta \Delta u^2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} N = & N^0 + N_u \Delta u + N_{uu} \Delta u^2 + N_r r + N_v v + \\ & + N_{\dot{r}} \dot{r} + N_{\dot{v}} \dot{v} + N_{\delta} \delta + N_{rrr} r^3 + N_{vvv} v^3 + \\ & + N_{\delta\delta\delta} \delta^3 + N_{rr\delta} r^2 \delta + N_{r\delta\delta} r\delta^2 + N_{rvr} r^2 v + \\ & + N_{rvv} rv^2 + N_{v\delta\delta} v\delta^2 + N_{vv\delta} v^2 \delta + N_{\delta vr} \delta vr + \\ & + N_{vu} v \Delta u + N_{vuu} v \Delta u^2 + N_{ru} r \Delta u + \\ & + N_{ruu} r \Delta u^2 + N_{\delta u} \delta \Delta u + N_{\delta uu} \delta \Delta u^2 \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $\Delta u = u - u_0$ ,  $X^0$  es la fuerza en la dirección  $x$  en la condición de equilibrio,  $u_0 = U$  (velocidad del buque) y  $N^0$  e  $Y^0$  el momento- $N$  y la fuerza- $Y$  para  $v = r = \delta = 0$

#### 3.1.2 Modelo de Norrbín

Norrbín desarrolló un modelo para la maniobra de buques en aguas profundas y restringidas [10]. El modelo está formado por tres ecuaciones. Para hacer adimensionales los coeficientes y parámetros utilizó el sistema "Bis". El modelo que presentó para aguas profundas es el que se indica a continuación:

$$\begin{aligned} (1 - X_{\dot{u}}'') \dot{u} = & L^{-1} \frac{1}{2} X_{uu}'' u^2 + L^{-2} g^{-1} \frac{1}{24} X_{uuuu}'' u^4 + \\ & + g T'' (1 - t) + (1 + X_{vr}'') vr + L(x_G'' + \frac{1}{2} X_{rr}'') r^2 + \frac{1}{2} \\ & + L^{-2} g^{-1} \frac{1}{6} X_{u|v|v}'' u |v| v^2 + L^{-1} \frac{1}{4} X_{c|c|\delta\delta}'' c |c| \delta_e^2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (1 - Y_{\dot{v}}'') \dot{v} = & L(Y_r'' - x_G'' +) \dot{r} + (Y_{ur}'' - 1) ur + \\ & + L^{-1/2} g^{-1/2} \frac{1}{2} Y_{uuu}'' u^2 r + L^{-1} Y_{uv}'' uv + \\ & + L^{-3/2} g^{-1/2} \frac{1}{2} Y_{uuu}'' u^2 v + L^{-1} \frac{1}{2} Y_{|v|v}'' |v| v + \\ & + L \frac{1}{2} Y_{|r|r}'' |r| r + \frac{1}{2} Y_{|v|r}'' |v| r + \frac{1}{2} Y_{cc\delta}'' c^2 \delta_e + k_y g T'' \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
(k_z''^2 - N_r'')\dot{r} &= L(N_v'' - x_G'')\dot{v} + L^{-1}(N_{ur}'' - x_G'')ur + \\
&+ L^{-3/2}g^{-1/2}\frac{1}{2}N_{uv}''u^2r + L^{-2}N_{uv}''uv + \\
&+ L^{-5/2}g^{-1/2}\frac{1}{2}N_{uv}''u^2v + L^{-2}\frac{1}{2}N_{|v|v}''|v|v + \quad (17) \\
&+ \frac{1}{2}N_{|r|r}''|r|r + \frac{1}{2}N_{|v|r}''|v|r + L^{-2}\frac{1}{2}N_{cc\delta}''c^2\delta_e + \\
&+ L^{-1}k_NgT''
\end{aligned}$$

siendo  $L$  la eslora del buque,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $t$  el factor de reducción del trust,  $T''$  el empuje de la hélice,  $\delta_e$  el ángulo efectivo del timón,  $c$  la velocidad del flujo pasado el timón y  $k_z^2 = I_z''$  el radio de giro no dimensional.

El radio de giro con respecto al eje  $z$  se define como:

$$k_z^2 = I_z'' = \frac{I_z}{m} \Rightarrow I_z = m k_z^2 \Rightarrow k_z = \sqrt{I_z/m} \quad (18)$$

Para obtener el modelo del ángulo efectivo del timón se utiliza la ecuación (19):

$$\delta_e = \delta + (k_v \frac{v}{c} + k_r \frac{Lr}{2c})|\delta| \quad (19)$$

donde  $\delta$  representa el ángulo del timón y los coeficientes  $k_v$  y  $k_r$  tienen unos valores típicos de  $k_v = -0,5$  y  $k_r = 0,5$ . El valor de la velocidad del flujo pasado el timón para un empuje positivo, está definido por:

$$c^2 = \frac{1}{2}c_{uu}^2u^2 + c_{un}^2un + \frac{1}{2}c_{|n|n}^2|n|n + \frac{1}{2}c_{nn}^2n^2 \quad (20)$$

donde  $n$  representa la velocidad del propulsor en revoluciones por minuto y las constantes  $c_{uu}^2$ ,  $c_{un}^2$ ,  $c_{|n|n}^2$  y  $c_{nn}^2$  dependen de las características de la hélice, así como de los factores de la estela.

El valor del empuje de la hélice se define:

$$gT'' = L^{-1}\frac{1}{2}T_{uu}''u^2 + T_{un}''un + \frac{1}{2}c_{|n|n}^2|n|n + \frac{1}{2}c_{nn}^2n^2 \quad (21)$$

### 2.1.3 Modelo de Blanke

Blanke propuso una forma simplificada del modelo de Norrbín manteniendo en el modelo sólo los coeficientes hidrodinámicos más importantes [3] de forma que pueda servir para describir una importante variedad de regímenes de maniobra. Si se desea una estimación exacta en todo el rango de operación se

requieren modelos más precisos como los propuestos por [1] ó [10].

Blanke utiliza la ecuación (10) con las derivadas hidrodinámicas de las masas añadidas y amortiguamiento hidrodinámico dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
X &= X_u \dot{u} + X_{vr} vr + X_{rr} r^2 + X_{uu} u^2 \\
Y &= Y_v \dot{v} + Y_r \dot{r} + Y_{ur} ur + Y_{uv} uv + Y_{|v|v} |v|v + Y_{|v|r} |v|r \quad (22) \\
N &= N_r \dot{r} + N_v \dot{v} + N_{ur} ur + N_{uv} uv + N_{|v|v} |v|v + N_{|v|r} |v|r
\end{aligned}$$

Los movimientos horizontales de guiñada y desplazamiento lateral se presentan con las ecuaciones de gobierno (23) y (24) en los que se ha añadido el coeficiente hidrodinámico de las fuerzas y momentos del timón. El primer miembro agrupa sólo los términos de la matriz de masas e inercia, incluyendo las masas añadidas:

$$\begin{aligned}
(m - Y_v)\dot{v} + (mx_G - Y_r)\dot{r} &= \\
- (m - Y_{ur})ur + Y_{uv}uv + Y_{|v|v}|v|v + \quad (23) \\
+ Y_{|v|r}|v|r + Y_{cc\delta}c^2\delta + Y_{ext}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I_z - N_r)\dot{r} + (mx_G - N_v)\dot{v} &= \\
- (mx_G - N_{ur})ur + N_{uv}uv + N_{|v|v}|v|v + \quad (24) \\
+ N_{|v|r}|v|r + Y_{cc\delta}c^2\delta + N_{ext}
\end{aligned}$$

La ecuación de avance que se puede considerar desacoplada de las otras dos ecuaciones de gobierno se puede expresar por:

$$(m - X_u)\dot{u} = X_{uu}u^2 + (1-t)T + T_{loss} \quad (25)$$

donde el término  $T_{loss}$  viene dado por la expresión:

$$T_{loss} = (m + X_{vr})vr + (mx_G + X_{rr})r^2 + X_{cc\delta}c^2\delta^2 + X_{ext} \quad (26)$$

siendo  $t$  el factor de reducción del trust,  $T$  el empuje de la hélice,  $c$  la velocidad del flujo pasado el timón,  $T_{loss}$  los términos de resistencia añadida,  $(m + X_{vr})$  el ángulo efectivo del timón,  $(mx_G + X_{rr})$  la velocidad del flujo pasado el timón y  $X_{ext}$  el radio de giro no dimensional.

El cuadrado de la velocidad del flujo pasado el timón  $c$  es:

$$c^2 = V_a^2 + C_T^2 T \quad (27)$$

siendo  $V_a$  la velocidad de avance del agua al entrar en el propulsor. Se sugiere para  $C_T^2$  un valor medio de varios perfiles del timón:

$$C_T^2 \approx 0,8 \alpha \frac{8}{\pi \rho D^2} \quad (28)$$

donde  $\alpha$  es el radio entre el diámetro de la hélice y la altura del timón y  $D$  el diámetro del propulsor.

### 3.2 MODELOS LINEALES

Para obtener las ecuaciones lineales del movimiento se parte de la ecuación (10) y se supone [5] que la velocidad transversal  $v$ , la velocidad de guiñada  $r$  y el ángulo del timón  $\delta$  son pequeños. Esto implica que, suponiendo que la velocidad del buque  $u_0$  no varía y el empuje se mantiene constante, la primera ecuación (movimiento longitudinal) se puede desacoplar de las otras dos (movimiento transversal y guiñada). También se considera que la velocidad transversal y de guiñada son nulas ( $v_0 = r_0 = 0$ ). Así, para pequeñas perturbaciones alrededor de los valores nominales  $u_0$ ,  $v_0$  y  $r_0$ , la ecuación (10) se puede escribir como:

Ec. de la velocidad:  $X = m\dot{u}$

Ecuaciones de gobierno:

$$\begin{aligned} Y &= m(\dot{v} - u_0 r + x_G \dot{r}) \\ N &= I_z \dot{r} + m x_G (u_0 r + \dot{v}) \end{aligned} \quad (29)$$

La primera ecuación relaciona el empuje del propulsor con la velocidad del buque y, aunque esta relación es eminentemente no lineal, en el estudio del gobierno del buque por modelos lineales se supone que su velocidad se mantiene constante y sólo se consideran las ecuaciones de gobierno. En [5] se presenta una expresión no lineal de la ecuación de velocidad, junto con una aproximación linealizada.

Linealizando las funciones  $Y$ ,  $N$  alrededor del estado de equilibrio  $v = r = \delta = 0$  en la ecuación (9), se obtiene:

$$\begin{aligned} Y &= Y_v v + Y_{\dot{v}} \dot{v} + Y_r r + Y_{\dot{r}} \dot{r} + Y_{\delta} \delta \\ N &= N_v v + N_{\dot{v}} \dot{v} + N_r r + N_{\dot{r}} \dot{r} + N_{\delta} \delta \end{aligned} \quad (30)$$

que sustituyendo en las ecuaciones de gobierno de la ecuación (29) y ordenando, resulta:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m - Y_{\dot{v}} & m x_G - Y_{\dot{r}} \\ m x_G - N_{\dot{v}} & I_z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} Y_v & Y_r - m u_0 \\ N_v & N_r - m x_G u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta} \\ N_{\delta} \end{bmatrix} \delta \end{aligned} \quad (31)$$

#### 3.2.1 Modelo de espacio de estado

Las ecuaciones de movimiento (31) se pueden expresar en el espacio de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \delta \quad (33)$$

En [2] se pueden encontrar los parámetros del modelo (33) para varios buques.

#### 3.2.2 Modelo de función de transferencia

De la ecuación (33) se puede obtener la función de transferencia que relaciona la velocidad de guiñada  $r$  con el ángulo del timón  $\delta$ :

$$\frac{r}{\delta}(s) = \frac{b_1 s + b_2}{(s^2 + a_1 s + a_2)} = \frac{K(1 + sT_3)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (34)$$

y la función que relaciona la velocidad transversal  $v$  con el ángulo del timón  $\delta$ :

$$\frac{v}{\delta}(s) = \frac{c_1 s + c_2}{(s^2 + a_1 s + a_2)} = \frac{K_v(1 + sT_v)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (35)$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -a_{11} - a_{22} \\ a_2 &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \\ b_1 &= b_{21} \\ b_2 &= a_{21} b_{11} - a_{11} b_{21} \\ c_1 &= b_{11} \\ c_2 &= a_{12} b_{21} - a_{22} b_{11} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

donde  $K_v$  y  $T_v$  son la ganancia y la constante de tiempo que describen el movimiento transversal.

Recordando que para movimientos restringidos al plano horizontal  $\psi \equiv r$ , se puede describir la ecuación (35) como:

$$\frac{\psi}{\delta}(s) = \frac{K(1 + sT_3)}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (37)$$

que en el dominio del tiempo se expresa por:

$$T_1 T_2 \ddot{\psi} + (T_1 + T_2) \dot{\psi} + \psi = K(\delta + T_3 \dot{\delta}) \quad (38)$$

Estos modelos fueron originalmente propuestos por [9] y se utilizan habitualmente en el análisis de la estabilidad de buques y en el diseño de pilotos

automáticos. Nomoto propuso también un modelo aproximado de primer orden con una constante de tiempo efectiva  $T' = T_1' + T_2' - T_3'$ :

$$\frac{\psi}{\delta}(s) = \frac{K}{s(1+sT)} \quad (39)$$

cuya expresión en el dominio del tiempo resulta:

$$T\ddot{\psi} + \dot{\psi} = K\delta \quad (40)$$

### 3.3 MODELOS LINEALES CON ADICIÓN DE NO LINEALIDADES

Los modelos lineales sólo se pueden utilizar para pequeñas desviaciones del punto de equilibrio  $v = r = \delta = 0$ . Sirven para describir adecuadamente el movimiento de un buque en una trayectoria recta. Sin embargo, si se desea estudiar las características de giro del buque, sólo pueden utilizarse en el intervalo lineal en buques con estabilidad direccional. Para poder aumentar el intervalo de validez de los modelos lineales, varios autores [6], proponen la adición de un término no lineal al modelo lineal:

$$T_1T_2\ddot{\psi} + (T_1 + T_2)\dot{\psi} + KH(\psi) = K(\delta + T_3\dot{\delta}) \quad (41)$$

donde  $H(\psi)$  es una función no lineal de  $\psi$  que se puede obtener de la relación entre  $\dot{\psi}$  y  $\delta$  en el estado de equilibrio por medio de la prueba en espiral, y que puede aproximarse [14] por:

$$H(\psi) = a\psi^3 + b\psi \quad (42)$$

## 4 ECUACIONES DINÁMICAS CON 4 GRADOS DE LIBERTAD

En algunos buques como por ejemplo buques contenedores, de guerra o en los ferries de alta velocidad, además de los movimientos de avance, desplazamiento lateral y guiñada se debe incluir también el movimiento de balance en el modelo matemático. Si se sitúa el sistema de coordenadas  $O_B$  en el buque coincidiendo con los ejes principales de inercia, la ecuación (4) reduce a:

$$M_{RB(4 \times 4)}\dot{v} + C_{RB(4 \times 4)}(v)v = \tau_{RB(4 \times 1)} \quad (43)$$

donde el vector de velocidades viene dado por:

$$v = [u, v, p, r]^T \quad (44)$$

La matriz de masas e inercia tiene la forma:

$$M_{RB(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & -mz_G & mx_G \\ 0 & -mz_G & I_x & 0 \\ 0 & mx_G & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (45)$$

la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis es:

$$C_{RB(4 \times 4)}(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & mz_G r & -m(x_G r + v) \\ 0 & 0 & 0 & mu \\ -mz_G r & 0 & 0 & 0 \\ m(x_G r + v) & -mu & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

siendo  $m$  la masa del buque,  $u$  y  $v$  las velocidades lineales de avance y desplazamiento lateral y  $p$  y  $r$  las velocidades angulares de balanceo y cabezada.

El vector de las fuerzas externas totales en los ejes  $x_B$  e  $y_B$  ( $X$ ,  $Y$ ) y los momentos externos totales en los ejes  $z_B$  e  $y_B$  ( $N$  y  $K$ ) es:

$$\tau_{RB(4 \times 1)} = [X, Y, K, N]^T \quad (47)$$

que se suele representar de forma compacta como:

$$\begin{aligned} \text{Avance:} & \quad m(\dot{u} - vr - x_G r^2 + z_G pr) = X \\ \text{Desp. lateral:} & \quad m(\dot{v} - ur - z_G \dot{p} + x_G \dot{r}) = Y \\ \text{Balanceo:} & \quad I_x \dot{p} - mz_G(ur + \dot{v}) = K \\ \text{Guiñada:} & \quad I_z \dot{r} + mx_G(ur + \dot{v}) = N \end{aligned} \quad (48)$$

En [12] y [4] se presentan algunos de los modelos matemáticos más representativos para buques con cuatro grados de libertad.

## 5 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se expone un resumen de modelos de la gobernabilidad de un buque, tanto modelos obtenidos directamente de las ecuaciones hidrodinámicas, como modelos simplificados, lineales y lineales con adición de no linealidades. Estos modelos son necesarios para desarrollar sistemas de control de la gobernabilidad de un buque, tanto para pruebas de simulación como para pruebas con modelos físicos.

### Agradecimientos

El desarrollo de este trabajo ha sido subvencionado por la CICYT con el proyecto DPI2003-09745-C04-03.

### Referencias

- [1] Abkowitz M. A., (1964) Lectures on Ship Hydrodynamics, Steering and Manoeuvrability, Technical Report Hy-5 Hydrodynamics Department, hydro and Aerodynamics Laboratory, Lyngby, Denmark.
- [2] Astrom K. J. y Kallstrom C. G., (1976) "Identification of Ship Steering Dynamics", Automatica, vol. 12, September.
- [3] Blanke M. (1981). Ship propulsion losses related to automatic steering and prime mover control. PhD thesis. Servolaboratory. Technical University of Denmark. Lyngby. Denmark.
- [4] Blanke M., and Jansen A. G., (1997) "Dynamic properties of a container vessel with low metacentric height", Trans Inst MC, vol. 19, No 2.
- [5] Fossen T. I., (1994) Guidance and Control of Ocean Vehicles, John Wiley and Sons Ltd.
- [6] Kallstrom, C. G., Astrom, K. J. (1979) Identification and Adaptive Control Applied to Ship Steering. Tesis Doctoral, Lund Institute of Technology Department of Automatic Control, Sweden.
- [8] Lewis E. V., Editor. (1989) Principles of Naval Architecture (2<sup>a</sup> ed.), Vol. 3. The Society of Naval Architects and Marine Engineers.
- [9] Nomoto, K., Taguchi, T., Honda, K., Hirano S. (1957): "On the steering qualities of Ships". International. Shipbuilding. Progrees. vol.4.
- [10] Norrbin, N.H. (1970). Theory and observation on the use of a mathematical model for ship maneuvering in deep and confined waters. 8th Symposium on Naval Hydrodynamics.
- [11] SNAME, (1950) The Society of Naval Architects and marine Engineers. Nomenclature for Treating the Motion of a Submerged Body Through a Fluid, Technical and Research Bulletin, N° 1-5.
- [12] Son, K. H., Nomoto, K. (1981). On The Coupled Motion of Steering and Rolling of a Highspeed Container Ship. Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering. Japan, 20
- [13] Van Amerongen, J., Udink Ten Cate A. J Amerongen J. van, (1975): "Model Reference Adaptive Autopilots for Ships" Automatica, vol.11. Enero