XXV Jornadas de Automática
Ciudad Real, del 8 al 10 de septiembre de 2004

DISEÑO ROBUSTO DEL *LQR* VÍA *BDU*

C. Ramos, J. Sanchis, M. Martínez, J.M. Herrero
Grupo de Control Predictivo y Optimización Heurística
Universidad Politécnica de Valencia Camino de Vera 14, P.O. Box 22012 E-46071 Valencia, España
E-mail:cramos@isa.upv.es http://ctl-predictivo.upv.es

Resumen

En este artículo se muestra la técnica *BDU* *(Bounded Data Uncertainties)*, la cual considera modelos con *incertidumbre acotada en los datos*, y su aplicación en el diseño robusto del *LQR*. La técnica *BDU* está basada en la *teoría de juegos con restricciones*, y permite al diseñador incorporar *explícitamente* en la definición del problema información *a priori* sobre los límites de las incertidumbres. En concreto, se lleva a cabo una *regularización automática* a partir de una cota de la incertidumbre.

Palabras clave: BDU, LQR, Robustez.

1 Mínimos Cuadrados Regularizado.

La técnica de **Mínimos Cuadrados** está presente en numerosas teorías de identificación y control, como son el filtro de Kalman, control *LQR*, *LQG*, *GPC*, etc. Su popularidad es debida a que es fácil de plantear y de resolver. Así, dado un vector $b \in \mathbb{R}^m$ que contiene medidas ruidosas (o con incertidumbre) relacionado con un vector desconocido $x \in \mathbb{R}^n$, mediante el modelo lineal $Ax = b + v \approx b$ para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ conocida (con $m \geq n$), se estima x minimizando el error de estimación en el sentido de la norma euclídea $\underset{x}{min} \|Ax - b\|_2$, dando como solución $\hat{x}$, siendo A^+ la matriz pseudoinversa de A

$$\hat{x} = \left[A^T A\right]^{-1} A^T b = A^+ b \tag{1}$$

El método considera que todos los errores e incertidumbre están presentes sólo en el vector b, y por tanto A es conocido exactamente. El vector v indica un término de ruido que explica la desigualdad entre el vector medido b y el vector Ax. Habitualmente $v \neq 0$, y por tanto b no pertenece al rango de A, $b \notin \mathcal{R}(A)$, y el problema de mínimos cuadrados busca el vector $\hat{b} = A\hat{x} \in \mathcal{R}(A)$ que esté más cerca a b en el sentido de la norma euclídea.

La problemática del método de mínimos cuadrados radica en que es *sensible a errores en los datos*. Es decir, un diseño de mínimos cuadrados basado en los datos (A, b) puede resultar inadecuado cuando los datos *'reales'* no son (A, b) sino una versión perturbada de éstos, $(A+\delta A, b)$, siendo δA desconocido. El problema radica en que las perturbaciones o incertidumbre en los datos aparece con mucha frecuencia en la práctica en los problemas de control, debido a causas como pueden ser [8] que los valores nominales de los parámetros del modelo son aproximaciones de los valores reales, siempre existen errores en la medición de las variables, y generalmente no se conoce la estructura del proceso en alta frecuencia, o por simplicidad, se utilizan modelos de bajo orden para representar dinámicas complejas, lo que ocasiona errores de modelado, normalmente conocidos como *dinámica no modelada.*

El método de **Mínimos Cuadrados Regularizado** es una modificación del anterior que pretende combatir el problema de *mal condicionamiento* [3],[9],[4], y puede además solventar el problema anterior. Consiste en añadir una matriz diagonal λ para que la inversión sea más fácil y más precisa (**regularización**), resultando, en este caso, la solución

$$\hat{x} = \left[A^T A + \lambda I\right]^{-1} A^T b \tag{2}$$

la cual puede ser vista como solución del siguiente índice

$$\underset{x}{min} \left[\|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2\right] \tag{3}$$

El inconveniente radica en que se elige λ de un modo intuitivo, y sin ningún procedimiento o técnica que ayude en su diseño. De modo que si es muy grande, se produce una *sobrerregularización* la cual puede originar pérdida de información importante, y si λ resulta pequeño se produce una *subregularización* que puede provocar que la solución no sea robusta. A continuación, se presenta una técnica que lleva a cabo la regularización automáticamente, diseñando λ a partir de una cota de la incertidumbre δA, es decir, proporciona una regularización *automática* sin intervención del usuario. Esta técnica se llama BDU.

2 Bounded Data Uncertainties (BDU).

2.1 Planteamiento del Problema.

El problema **Bounded Data Uncertainties, BDU** [1],[2],[7],[6],[5] también llamado genéricamente **Min-Max** se propuso y se resolvió, mediante técnicas de la **ecuación secular** en [2]. El problema BDU trata de encontrar el *peor modelo* en una región acotada, y luego resuelve el problema basado en este peor escenario. Matemáticamente el problema se escribe

$$\min_{x} \max_{\substack{\|\delta A\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta b\|_2 \leq \eta_b}} \|(A+\delta A)\,x-(b+\delta b)\|_2 \tag{4}$$

donde (A,b) sería el *modelo nominal* y $(A+\delta A, b+\delta b)$ sería el *modelo real perturbado*, el cual no puede ser conocido, pues no se conoce δA y δb, aunque sí una cota superior de éstas η_A y η_b, que definen sendas bolas alrededor de (A,b), $\|\delta A\|_2 \leq \eta_A$ y $\|\delta b\|_2 \leq \eta_b$.

El problema se reduce a encontrar el vector $\hat{x}$ cuyo máximo residuo es el más pequeño posible. De la interpretación geométrica de [2] se extrae que el límite en la incertidumbre para tener una solución $\hat{x}$ distinta de cero es

$$\eta_A < \frac{\| A^T b \|_2}{\| b \|_2} \tag{5}$$

2.2 Reducción del problema *Min-Max* a un problema de minimización.

Suponiendo que se cumple el límite anterior, se puede acotar superiormente el índice inicial, de modo que para cualquier $x \neq 0$, el problema Min-Max con restricciones establecido en la ecuación (4), es equivalente al siguiente problema de minimización sin restricciones

$$\min_{x} J(x) = \min_{x}(\| Ax-b \|_2 + \eta_A \| x \|_2 + \eta_b) \tag{6}$$

2.3 Minimización del índice.

El índice $J(x)$ es convexo y continuo en x, aunque no diferenciable en todos los puntos. Considerando los casos para los que el índice $J(x)$ es diferenciable $(x \neq 0, Ax-b \neq 0)$, el gradiente de $J(x)$ existe y definiendo el número positivo λ como

$$\lambda = \frac{\eta_A \| Ax-b \|_2}{\| x \|_2} \tag{7}$$

se tiene que el mínimo viene dado por

$$x = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T b \tag{8}$$

Hay que hacer notar que el número positivo λ depende de x, por lo que la solución al problema de minimización pasa por resolver el sistema de ecuaciones **no lineales** formado por las ecuaciones (7) y (8), donde el parámetro λ se expresa como una ecuación **no lineal** que depende exclusivamente de (λ, A, b, η_A). Definiendo la función $F(\lambda)$, **ecuación secular**, como

$$F(\lambda) = \frac{\eta_A \| Ax-b \|_2}{\| x \|_2} - \lambda \tag{9}$$

se demuestra que existe una única solución $\hat{\lambda} > 0$ tal que $F(\hat{\lambda}) = 0$. Por lo tanto esta raíz puede ser calculada por cualquier método de localización de raíces tipo *bisección* o *falsi*.

2.4 Extensión del índice planteado.

Del mismo modo se puede plantear el problema de incertidumbres en el modelo pero partiendo del índice que se emplea clásicamente en el diseño de diferentes estrategias de control, como son el LQR, LQG, *Control Predictivo*, donde se introduce en el índice un término adicional que penaliza el *esfuerzo de control* (en este caso la variable x). De nuevo, si se incorpora explícitamente un límite en el tamaño de las incertidumbres se puede plantear el siguiente problema

$$\min_{x} \left[\max_{\substack{\|\delta A\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta b\|_2 \leq \eta_b}} \left\{ \left\| \begin{array}{c} (A+\delta A)x- \\ -(b+\delta b) \end{array} \right\|_2^2 \begin{array}{c} \\ +\rho \| x \|_2^2 \end{array} \right\} \right] \tag{10}$$

donde el parámetro ρ penaliza la variable x. Se puede comprobar que en ausencia de incertidumbre ($\delta A = 0$, $\delta b = 0$), planteando el índice

$$\min_{x} \left[\| Ax-b \|_2^2 + \rho \| x \|_2^2 \right] \tag{11}$$

se obtendría la solución

$$\hat{x} = (A^T A + \rho I)^{-1} A^T b \tag{12}$$

observándose que ρ sería el *parámetro de regularización del problema sin incertidumbre*. Evidentemente, al considerar la incertidumbre, y aplicar la técnica BDU, se obtendrá un *nuevo parámetro de regularización* λ, que sustituirá a ρ tal y como se muestra a continuación. Así pues, volviendo de nuevo al índice (10), éste se puede acotar superiormente, obteniendo

$$\min_{x} \left\{ \begin{array}{c} (\| Ax - b \|_2 + \eta_A \| x \|_2 + \eta_b)^2 + \\ + \rho \| x \|_2^2 \end{array} \right\} \qquad (13)$$

donde el índice de coste $J(x)$ es una función convexa, y por tanto se puede obtener su mínimo global resolviendo $\nabla J(x) = 0$, obteniendo

$$x = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T b \qquad (14)$$

donde, como en el caso anterior, el número positivo λ depende de x, siendo en este caso

$$\lambda = \frac{\eta_A \| Ax - b \|_2}{\| x \|_2} + \qquad (15)$$
$$+ \frac{\rho \| Ax - b \|_2}{\| Ax - b \|_2 + \eta_A \| x \|_2 + \eta_b}$$

por lo que la solución al problema de minimización pasa por resolver el sistema de ecuaciones **no lineales** formado por (14) y (16), siendo (16) una ecuación no lineal que depende exclusivamente de λ y de los datos del problema $(A, b, \rho, \eta_A, \eta_b)$. Se destaca que si el factor de ponderación de la variable x se anula, $\rho = 0$, se obtiene la solución del subapartado anterior.

3 El Controlador LQR.

3.1 Horizonte Finito. Ecuación Recursiva de Riccati.

En el problema LQR (*Linear Quadratic Regulator*) el objetivo principal consiste en regular el estado de un modelo lineal en espacio de estados para que llegue a cero, mientras se mantenga bajo el coste debido al esfuerzo de control. Así pues, considerando el siguiente modelo en espacio de estados de *dimensión uno* (es decir, A y b son escalares),

$$x_{i+1} = Ax_i + bu_i \qquad (16)$$

donde se considera el estado inicial x_0, y $\{u_i\}$ indica la secuencia de control de entrada. En el problema LQR se busca la secuencia de control $\{u_i\}$ que resuelva

$$\min_{\{u_i\}} \left(px_{N+1}^2 + \sum_{i=0}^{N} \left[qx_i^2 + ru_i^2 \right] \right) \qquad (17)$$

siendo $r, p > 0$ y $q \geq 0$, para unos valores dados de $\{p, q, r\}$ y sobre un intervalo de tiempo $0 \leq i \leq N$.

Este problema se puede resolver *recursivamente* dividiendo la función de coste en dos términos, donde sólo el segundo término, a través de la ecuación de estado (16) para x_{i+1}, depende de u_i. Minimizando para la variable u_i, se obtiene la siguiente ley de control para $0 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= -k_i x_i \\ k_i &= \frac{Abp_{i+1}}{r + b^2 p_{i+1}} \\ p_i &= \frac{rA^2 p_{i+1}}{r + b^2 p_{i+1}} + q \\ p_{N+1} &= p \end{aligned} \qquad (18)$$

que indica que el control óptimo en el instante i es una realimentación del estado en el instante i, cuya ganancia k_i es función de los parámetros del modelo $\{A, b, r\}$ y del coste p_{i+1}, donde p_i se propaga vía la *recursión de Riccati* con la condición límite $p_{N+1} = p$.

3.2 Horizonte Infinito. Ecuación Algebraica de Riccati.

En ocasiones, si el horizonte N elegido es demasiado pequeño, el control con LQR puede resultar inestable. Y también, en ciertas ocasiones, si se incrementa el horizonte, el sistema se estabiliza. Si el horizonte es demasiado grande, apenas hay diferencia con la formulación del LQR con *horizonte infinito*. En este último caso, cuando se formula la ley de control del LQR considerando horizonte infinito, queda asegurada la estabilidad del sistema, siempre y cuando se cumpla que

- (A, b) sea *controlable*, o al menos *estabilizable*, $(A - bk) \subset \mathbb{C}_S$, es decir, que los polos del sistema en bucle cerrado estén dentro del círculo unidad, siendo k la ley de control (la realimentación del estado),
- que (A, T) sea *detectable* si la matriz q puede factorizarse de la forma $q = T^T T$,
- que $r > 0$.

El modelo considerado, un sistema *unidimensional*, cumple las condiciones anteriores, por lo que, es posible plantear el índice del LQR con horizonte de predicción infinito y obtener una ley de control $u_i = -kx_i, \forall i$, donde la realimentación k es constante. En este caso, la ecuación recursiva de Riccati planteada en el apartado anterior se transformaría en la *ecuación algebraica de Riccati* que se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
u_i &= -kx_i \\
k &= \frac{Abp}{b^2p+r} \\
p &= \frac{A^2rp}{r+b^2p}+q
\end{aligned} \qquad (19)
$$

4 Diseño Robusto del LQR vía BDU.

4.1 Horizonte de Predicción Finito. Ecuación de Riccati Recursiva modificada vía BDU.

En este caso, se considera el siguiente modelo en espacio de estados de *dimensión uno* (es decir, A y b son escalares) con **incertidumbre paramétrica** $\delta A, \delta b$,

$$
x_{i+1} = (A+\delta A)x_i + (b+\delta b)u_i \qquad (20)
$$

donde se considera el estado inicial x_0, y $\{u_i\}$ indica la secuencia de control de entrada. Conociendo una cota superior de la incertidumbre ($\|\delta A\|_2 \leq \eta_A$, $\|\delta b\|_2 \leq \eta_b$), se puede plantear el problema LQR como un problema *Min-Max o BDU*

$$
\min_{\{u_i\}} \max_{\substack{\|\delta A\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta b\|_2 \leq \eta_b}} \left(px_{N+1}^2 + \sum_{i=0}^{N} \left[qx_i^2 + ru_i^2 \right] \right) \qquad (21)
$$

siendo $r, p > 0$ y $q \geq 0$, para unos valores dados de $\{p, q, r\}$ y sobre un intervalo de tiempo $0 \leq i \leq N$. Tal y como se comentó en el apartado anterior, el problema se puede resolver *recursivamente* dividiendo la función de coste en dos términos, donde sólo el segundo término, a través de la ecuación de estado (20) para x_{N+1}, depende de u_N. Considerando el segundo término

$$
\min_{u_N} \max_{\substack{\|\delta A\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta b\|_2 \leq \eta_b}} \left[px_{N+1}^2 + qx_N^2 + ru_N^2 \right] \qquad (22)
$$

y sustituyendo x_{N+1}, sabiendo que x_N no depende de u_N no afecta al resultado de la minimización y se puede eliminar y haciendo unos cambios de variables, se puede presentar como un problema BDU del tipo (10)

$$
\min_{u_N} \max_{\substack{\|\delta \hat{A}\|_2 \leq \eta_{\hat{A}} \\ \|\delta \hat{b}\|_2 \leq \eta_{\hat{b}}}} \left[\left\| \begin{array}{c} (\hat{A}+\delta\hat{A})u_N - \\ -(\hat{b}+\delta\hat{b}) \end{array} \right\|_2^2 + r \| u_N \|_2^2 \right] \qquad (23)
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\hat{A} &= p^{\frac{1}{2}} b & \hat{b} &= -p^{\frac{1}{2}} A x_N \\
\delta\hat{A} &= p^{\frac{1}{2}} \delta b & \delta\hat{b} &= -p^{\frac{1}{2}} \delta A x_N \\
\eta_{\hat{A}} &= p^{\frac{1}{2}} \eta_b & \eta_{\hat{b}} &= p^{\frac{1}{2}} \eta_A \left| x_N \right|
\end{aligned} \qquad (24)
$$

Previamente a la resolución, para poder aplicar el BDU, se debe demostrar que se cumple la condición de que la incertidumbre $\eta_{\hat{A}}$ sea menor de una determinada cota

$$
\eta_{\hat{A}} < \frac{\left\| \hat{A}^T \hat{b} \right\|_2}{\left\| \hat{b} \right\|_2} \qquad (25)
$$

que tras deshacer el cambio de variables y siendo $p^{1/2} \geq 0$, resulta

$$
\eta_b < \|b\|_2 \qquad (26)
$$

Minimizando para la variable u_N, la solución BDU resulta

$$
u_N = (\hat{A}^T \hat{A} + \lambda_N I)^{-1} \hat{A}^T \hat{b} \qquad (27)
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_N = \frac{\eta_{\hat{A}} \parallel \hat{A}u_N - \hat{b} \parallel_2}{\parallel u_N \parallel_2} + \\
+ \frac{r \parallel \hat{A}u_N - \hat{b} \parallel_2}{\parallel \hat{A}u_N - \hat{b} \parallel_2 + \eta_{\hat{A}} \parallel u_N \parallel_2 + \eta_{\hat{b}}}
\end{aligned} \qquad (28)
$$

donde deshaciendo el cambio de variables anterior se obtiene

$$
u_N = -\frac{Abp}{\lambda_N I + b^2 p} x_N \qquad (29)
$$

$$
\lambda_N = \frac{1}{1+\frac{\eta_A}{|A|}} \left[\frac{r}{1-\frac{\eta_b}{|b|}} - pb^2 \left[\frac{\eta_A}{|A|} + \frac{\eta_b}{|b|} \right] \right] \qquad (30)
$$

Sustituyendo u_N en el índice de coste (22), se obtiene el coste p_N que penaliza al estado x_N

$$
\begin{aligned}
p_N = pA^2 \left(\frac{\lambda_N + \eta_b p \left| b \right|}{\lambda_N + b^2 p} + \frac{\eta_A}{|A|} \right)^2 + \\
+ \frac{rA^2b^2p^2}{(\lambda_N + b^2p)^2} + q
\end{aligned} \qquad (31)
$$

Las ecuaciones (29), (30) y (31) constituyen la ley de control para el instante N. En esta ley aparece la *ecuación de Riccati recursiva* modificada por la técnica BDU. Del mismo modo, se podría desarrollar la ley de control para el resto de instantes $0 \leq i \leq N$ obteniendo

$$\begin{aligned}
u_i &= -k_i x_i \\
k_i &= \frac{Abp_{i+1}}{\lambda_i I + b^2 p_{i+1}} \\
\lambda_i &= \frac{1}{1+\frac{\eta_A}{|A|}}\left[\frac{r}{1-\frac{\eta_b}{|b|}} - p_{i+1}b^2\left[\frac{\eta_A}{|A|}+\frac{\eta_b}{|b|}\right]\right] \\
p_i &= p_{i+1}A^2\left(\frac{\lambda_i + \eta_b p_{i+1}\,|b|}{\lambda_i + b^2 p_{i+1}} + \frac{\eta_A}{|A|}\right)^2 + \\
&+ \frac{rA^2b^2p_{i+1}^2}{(\lambda_i + b^2p_{i+1})^2} + q
\end{aligned} \tag{32}$$

donde p_i se propaga mediante la *recursión de Riccati modificada vía BDU* con la condición límite $p_{N+1} = p$.

Se destaca que el valor de λ_i debe ser un número positivo, en caso contrario se considerará $\lambda_i = 0$, y por tanto la ley de control resultaría $k_i = \frac{A}{b}$. En la expresión de λ_i se observa la necesidad de cumplir la condición del BDU, $\eta_b < \|b\|_2 = |b|$, ya que si $\eta_b > |b|$ entonces $1 - \frac{\eta_b}{|b|} < 0$ y resulta siempre $\lambda_i < 0$.

Por otra parte, aún a pesar de cumplir (26), en ocasiones $\lambda_i < 0$, y para evitarlo, se debe cumplir para $0 \leq i \leq N$

$$\frac{r}{1-\frac{\eta_b}{|b|}} > p_{i+1}b^2\left[\frac{\eta_A}{|A|}+\frac{\eta_b}{|b|}\right] \tag{33}$$

Así pues se concluye diciendo que la ecuación (26) es necesaria para poder aplicar la técnica BDU y la ecuación (33) es necesaria si se desea que $\lambda_i > 0$.

4.2 Horizonte Infinito. Ecuación Algebraica de Riccati modificada vía *BDU*.

Planteando el siguiente problema *Min-Max* con horizonte de predicción infinito

$$\begin{aligned}
&\min_{\{u_i\}} \max_{\substack{\|\delta A\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta b\|_2 \leq \eta_b}} J = \\
&= \min_{\{u_i\}} \max_{\substack{\|\delta A\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta b\|_2 \leq \eta_b}} \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left[qx_i^2 + ru_i^2\right]\right)
\end{aligned} \tag{34}$$

cuyo índice se puede descomponer en dos términos

$$J = J_1 + J_2 = \sum_{i=0}^{\infty} qx_i^2 + \sum_{i=0}^{\infty} ru_i^2 \tag{35}$$

y suponiendo $u_i = -kx_i$, la evolución del estado en bucle cerrado sigue la siguiente trayectoria, partiendo del estado inicial x_0

$$x_i = ((A+\delta A) - (b+\delta b)k)^i x_0 \tag{36}$$

por lo que sustituyendo resulta la siguiente expresión del índice

$$J = \lim_{i\to\infty} L_{i+1}x_0^2 + \lim_{i\to\infty} L'_{i+1}x_0^2 \tag{37}$$

siendo

$$\begin{aligned}
L_{i+1} &= ((A+\delta A) - (b+\delta b)k)^2 L_i + q \\
L'_{i+1} &= ((A+\delta A) - (b+\delta b)k)^2 L'_i + rk^2
\end{aligned} \tag{38}$$

Para que el sistema en bucle cerrado sea estable y, por tanto, el índice J presente un valor limitado, las series anteriores deben converger, expresando el índice así

$$J = \left[L_\infty + L'_\infty\right] x_0^2 = px_0^2 \tag{39}$$

de donde se obtiene la ecuación algebraica de Riccati

$$p = ((A+\delta A) - (b+\delta b)k)^2 p + q + rk^2 \tag{40}$$

la cual depende de la realimentación k. Para eliminar dicha dependencia, se debe calcular el valor de k, el cual se puede obtener minimizando el índice respecto a u_0, obteniendo así la primera acción de control óptima la cual depende de x_0 mediante $u_0 = -kx_0$. Así pues, siendo el índice

$$J = ((A+\delta A) - (b+\delta b)k)^2 px_0^2 + qx_0^2 + rk^2x_0^2 \tag{41}$$

se elimina la dependencia de k sabiendo que $u_0 = -kx_0$ y como x_0 no depende de u_0 no afecta al resultado de la minimización y se puede eliminar y haciendo unos cambios de variables, se puede presentar como un problema BDU del tipo (10)

$$\min_{u_0} \max_{\substack{\|\delta \hat{A}\|_2 \leq \eta_{\hat{A}} \\ \|\delta \hat{b}\|_2 \leq \eta_{\hat{b}}}} \left[\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{c} (\hat{A}+\delta\hat{A})u_0 - \\ -(\hat{b}+\delta\hat{b}) \end{array} \right\|_2^2 + \\ +r \parallel u_0 \parallel_2^2 \end{array}\right] \tag{42}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= p^{\frac{1}{2}}b & \hat{b} &= -p^{\frac{1}{2}}Ax_0 \\
\delta\hat{A} &= p^{\frac{1}{2}}\delta b & \delta\hat{b} &= -p^{\frac{1}{2}}\delta A x_0 \\
\eta_{\hat{A}} &= p^{\frac{1}{2}}\eta_b & \eta_{\hat{b}} &= p^{\frac{1}{2}}\eta_A\,|x_0|
\end{aligned} \tag{43}$$

Minimizando para la variable u_0, la solución BDU resulta $u_0 = (\hat{A}^T\hat{A}+\lambda I)^{-1}\hat{A}^T\hat{b}$ donde deshaciendo el cambio de variables anterior se obtiene

$$u_0 = -kx_0 = -\frac{Abp}{\lambda I + b^2 p}x_0 \qquad (44)$$

Por tanto existe la realimentación k que se consideró constante para todo el horizonte $0 \leq i \leq N$, y si k es constante, también es constante p obtenida mediante la ecuación (40) y λ también. Así pues, si se calculara el resto de acciones de control $\{u_1, \ldots, u_N\}$, se obtendría la misma solución para la ley de control

$$\begin{aligned} u_i &= -kx_i \\ k &= \frac{Abp}{\lambda I + b^2 p} \\ \lambda &= \frac{1}{1+\frac{\eta_A}{|A|}}\left[\frac{r}{1-\frac{\eta_b}{|b|}} - pb^2\left[\frac{\eta_A}{|A|}+\frac{\eta_b}{|b|}\right]\right] \\ p &= pA^2\left(\frac{\lambda+\eta_b p\,|b|}{\lambda+b^2 p}+\frac{\eta_A}{|A|}\right)^2 + \frac{rA^2b^2p^2}{(\lambda+b^2p)^2}+q \end{aligned} \qquad (45)$$

Al igual que con horizonte finito, se destaca que el valor de λ debe ser un número positivo, en caso contrario se considerará $\lambda = 0$. En ese sentido, se debería cumplir

$$\frac{r}{1-\frac{\eta_b}{|b|}} > pb^2\left[\frac{\eta_A}{|A|}+\frac{\eta_b}{|b|}\right] \qquad (46)$$

Así pues se concluye diciendo que la ecuación (26) es necesaria para poder aplicar la técnica BDU tal y como se vio con horizonte finito y la ecuación (46) es necesaria si se desea que $\lambda > 0$.

5 Ejemplo.

En este ejemplo se pretende mostrar, cómo el sintonizado mediante la técnica BDU del LQR formulado con **horizonte infinito**, ofrece mejores prestaciones frente al LQR sintonizado sin usar BDU. Así pues, dado el siguiente sistema discreto

$$x_{i+1} = (A+\delta A)x_i + (b+\delta b)u_i \qquad (47)$$

siendo $A = 0.9$, $b = 1$, con la respectiva incertidumbre $\delta A = 0.2$, $\delta b = -0.27$, acotada por $\eta_A = 0.2$, $\eta_b = 0.27$.

Se cumple la *condición* necesaria para aplicar BDU, pues $0.27 = \eta_b < \|b\|_2 = 1$. Considerando los parámetros de diseño $p = 1$, $r = 1$ y $q = 0.04$, siendo $x_0 = 10$, se obtiene una respuesta inestable sin usar la técnica BDU (línea discontinua en la figura 1), y estable al sintonizar el LQR vía BDU (línea continua).

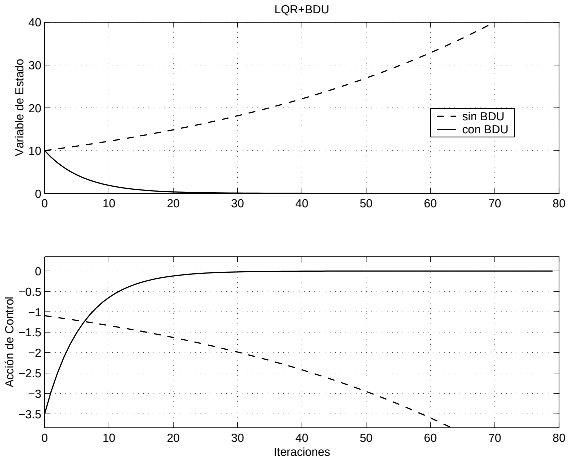

Figura 1: LQR con horizonte infinito.

Se destaca que en este ejemplo, el parámetro λ de regularización resulta positivo, por lo que es válida la ecuación de Riccati utilizada.

6 Conclusiones y Líneas futuras.

La **conclusión** fundamental del artículo sería que el BDU modifica los parámetros de penalización del estado y del esfuerzo de control en el LQR (p y r, respectivamente), los cuales se sintonizan habitualmente de modo empírico. Dicha modificación, tendiendo en cuenta la cota de incertidumbre presente en el sistema, dota al sistema de mayor robustez.

Ello conlleva la modificación de las ecuaciones recursiva y algebraica de Riccati, de modo que contemplen la técnica BDU y el estudio de las condiciones necesarias para su aplicación.

Como **línea futura** fundamental, se destaca la extensión al caso multidimensional, lo cual no es trivial, ya que en este caso, debido a las propiedades matemáticas de la norma de una matriz, no es posible obtener una ecuación explícita del parámetro λ, con el problema añadido de que en este caso, las expresiones de k_i y p_i dependen del vector de estado del peor caso $\hat{x_i}$, y por tanto la solución presenta la forma de un problema *TPBVP, two-point boundary value problem*, el cual se resuelve iterativamente.

Otra línea futura consiste en la aplicación de la técnica BDU a otra estrategia de control como es el *Control Predictivo*, beneficiándose del sintonizado guiado del parámetro λ. La aplicación es posible al resolverse también el problema de control predictivo como un problema de mínimos cuadrados.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos DPI2001-3106-C02-02, MCYT (España) y AGL-2002-04108-C02-01, MCYT (España).

Referencias

[1] S. Chandrasekaran, G.H. Golub, M. Gu, and A.H. Sayed. Worst-case parameter estimation with bounded model uncertainties. In *American Control Conference*, 1997.

[2] S. Chandrasekaran, G.H. Golub, M. Gu, and A.H. Sayed. Parameter estimation in the presence of bounded data uncertainties. *SIMAX*, 19(1):235–252, 1998.

[3] G.H. Golub and Ch.F. van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996.

[4] C.L. Lawson and R.J. Hanson. Solving least-squares problems. *SIAM*, 1995.

[5] V.H. Nascimento and A.H. Sayed. Optimal state regulation for uncertain state-space models. In *American Control Conference*, volume 1, pages 419–424, San Diego, June 1999.

[6] A.H. Sayed and V.H. Nascimento. Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties. In *Robustness in Identification and Control*, volume 245, pages 159–173, London, 1999. Springer Verlag.

[7] A.H. Sayed, V.H. Nascimento, and S. Chandrasekaran. Estimation and control with bounded data uncertainties. In *Linear Algebra and its Applications*, volume 284, pages 259–306. Elsevier, June 1998.

[8] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control. Analysis and Design*. John Wiley and Sons, 1996.

[9] A.N. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Soviet Math*, 4:1624–1627, 1963.