

# SIMULADOR DE CONTROLADORES PREDICTIVOS MULTIVARIABLES CON MODELOS EN ESPACIO DE ESTADOS

S. García-Nieto, J. Sanchís, M. Martínez y X. Blasco  
Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática.  
Universidad Politécnica de Valencia  
Camino de Vera s/n, 46022 Valencia  
Email: [jsanchis@isa.upv.es](mailto:jsanchis@isa.upv.es)  
<http://ctl-predictivo.upv.es/>

## Resumen

*En este artículo se describe un simulador de controladores predictivos multivariable como elemento de apoyo para la realización de prácticas en laboratorio. El objetivo de dichas prácticas es afianzar los conocimientos del alumno en temas de control predictivo MIMO con modelos en espacio de estados. La aplicación se ha desarrollado utilizando la herramienta de programación científica MATLAB 6.5.*

**Palabras Clave:** Control Predictivo en espacio de estados, docencia en control.

- $H_p$ : Horizonte de predicción.
- $H_u$ : Horizonte de control.
- $\alpha_i$ : Coeficientes de ponderación de los errores (diagonal de la matriz  $Q$ ).
- $\lambda_i$ : Coeficientes de ponderación de las acciones de control (diagonal de la matriz  $R$ ).

Una de las principales características del control predictivo es la incorporación de restricciones en el diseño del controlador. Por tanto, la minimización del índice de coste que se plantea incorpora una serie de restricciones en las variables del mismo. Mediante éstas somos capaces de modelar las limitaciones físicas del proceso, expresadas según se indica en la ecuación (2).

$$\begin{aligned} y_{\min_i} \leq y(k+i) \leq y_{\max_i}, \quad i = 1 \dots H_p \\ u_{\min_j} \leq u(k+j) \leq u_{\max_j}, \quad j = 0 \dots H_u - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

## 1. INTRODUCCIÓN

Todos los controladores predictivos basados en modelos comparten una metodología que se puede describir como sigue [2]:

- En cada instante  $k$  se predicen las salidas del proceso  $y(k + H_p | k)$  (predicción, en el instante  $k$ , de la salida en el instante  $k + H_p$ ), para una cierto horizonte de tiempo utilizando un determinado modelo del proceso.
- Se dispone de la trayectoria de referencia  $w(k + H_p)$ , que describe el comportamiento deseado de las salidas futuras del proceso.
- Se calculan las futuras acciones de control, vector  $\mathbf{u}$ , de manera que minimicen una determinado índice de coste, función del error cuadrático en el horizonte de predicción.

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{H_p} [w(k+i) - y(k+i|k)]^T Q [w(k+i) - y(k+i|k)] + \\ + \sum_{j=1}^{H_u} [u(k+j-1|k)]^T R [u(k+j-1|k)] \quad (1) \end{aligned}$$

donde:

- De la secuencia de acciones de control óptimas calculadas, sólo se aplica al proceso la primera de ellas. Los demás elementos se desprecian. Esta técnica se conoce como *horizonte móvil*.

El modelo de predicción [3] que se emplea se muestra en la ecuación (3).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ \vdots \\ y(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \cdot A^1 \\ \vdots \\ C \cdot A^{H_p} \end{bmatrix} \cdot x(k) + \quad (3) \\ + \begin{bmatrix} C \cdot B & 0 & \dots & 0 \\ C \cdot A \cdot B & C \cdot B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ C \cdot A^{H_p-1} \cdot B & C \cdot A^{H_p-2} \cdot B & \dots & C \cdot B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(k|k) \\ \vdots \\ u(k+H_u-1|k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las dimensiones de las matrices empleadas aumentan con el horizonte de predicción y el de control, hecho que incrementa la complejidad en el cálculo de este tipo de controladores.

Sustituyendo el modelo de predicción (3) en el índice descrito por la ecuación (1), y teniendo en cuentas las restricciones fijadas en la ecuación (2); usualmente se resuelve el problema de optimización con restricciones mediante la utilización de una rutina de programación cuadrática (QP).

Una cuestión a destacar es la obtención de los estados del sistema. Como se puede observar en el modelo de predicción de la ecuación (3), es necesario el conocimiento del vector de estado  $\mathbf{x}$ . Esta cuestión se resuelve mediante el uso de un observador. En presencia de ruido, se puede plantear la obtención del vector de estados mediante la utilización de un filtro de Kalman [1], descrito por la ecuación (4).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \cdot x(k) + B \cdot u(k) + G \cdot \psi(k) \\ Y(k) &= C \cdot x(k) + \rho(k) \\ QN &= E[v \cdot v^T] \\ RN &= E[w \cdot w^T] \end{aligned} \quad (4)$$

En donde  $\rho(k)$  y  $\psi(k)$  son sendos ruidos blancos de media cero y covarianzas conocidas ( $QN$  y  $RN$  respectivamente).

A partir de las ecuaciones del modelo se construye un observador del estado completo, tal y como muestra la ecuación (5).

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A \cdot \bar{x}(k) + B \cdot u(k) + K_e(k) \cdot [y(k) - C \cdot \bar{x}(k)] \\ K_e(k) &= A \cdot P(k) \cdot C^T \cdot (RN + C \cdot P(k) \cdot C^T)^{-1} \\ P(k+1) &= A \cdot P(k) \cdot A^T + G^T \cdot QNG - K_e(k) \cdot C \cdot P(k) \cdot A^T \end{aligned} \quad (5)$$

## 2. DESCRIPCIÓN DE LA APLICACIÓN.

La aplicación desarrollada está basada en los GUIDE de MATLAB [6], los cuales permiten programar aplicaciones con interfaces gráficas que se ejecutan en el entorno de trabajo de MATLAB. Esta filosofía de programación permite al alumno aumentar el número de herramientas disponibles a la hora del diseño de controladores. El alumno, aparte de disponer de toda la potencia de cálculo del programa MATLAB, puede usar una aplicación específica que se ejecuta dentro del mismo entorno.

En la figura 1 se muestra la interfaz de usuario desarrollada.

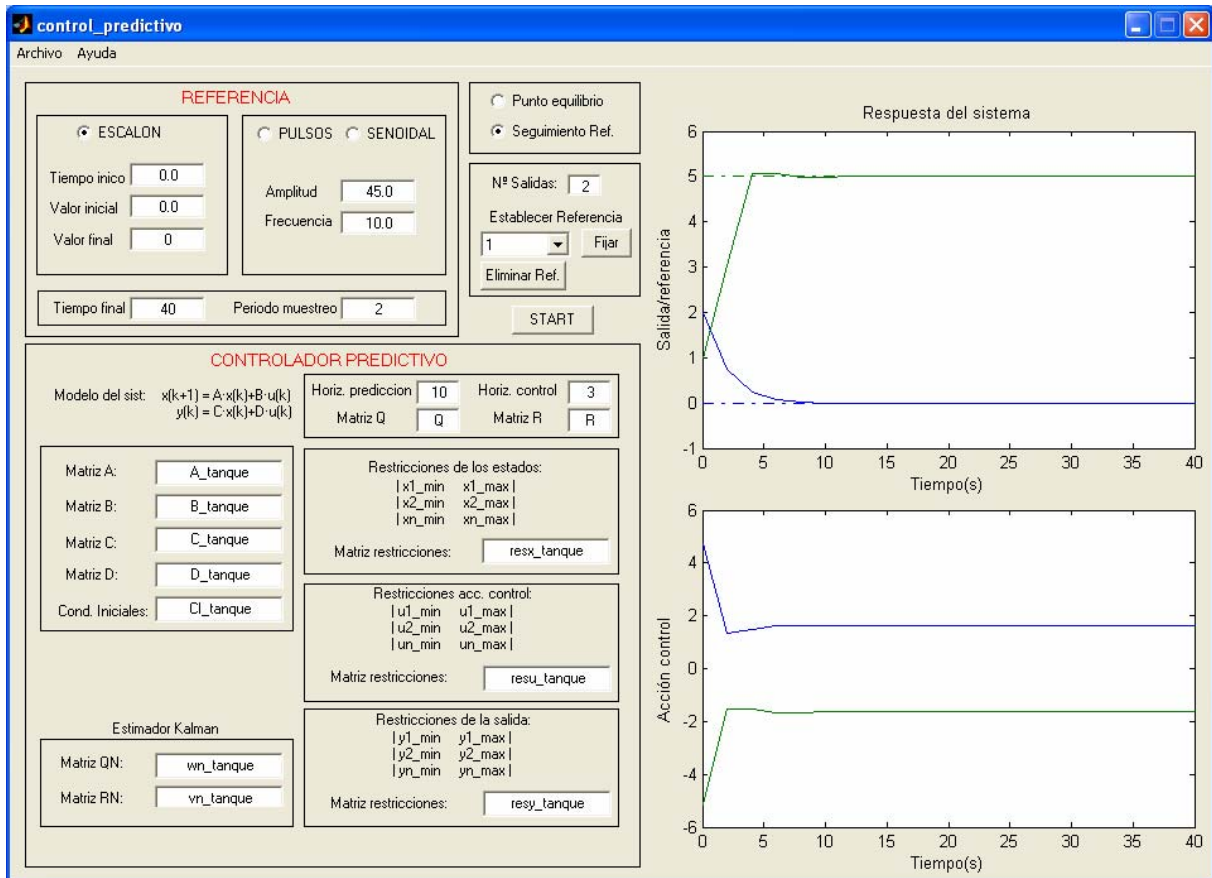


Figura 1. Interfaz de usuario.

Los puntos que siguen tratarán de profundizar en la utilización de cada uno de los elementos que aparecen en el interfaz de usuario.

## 2.1 MODELO DEL SISTEMA

La herramienta solicita al usuario la introducción de un modelo en espacio de estados del proceso que se pretende controlar, en la forma descrita por la ecuación (6).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) &= C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{aligned} \quad (6)$$

Las matrices A, B, C, y D se deben almacenar en ficheros *.mat*, característicos del entorno de trabajo MATLAB, por lo que es necesario aportar el nombre de estos ficheros.

Por otra parte, también se debe introducir una serie de datos referentes a la implementación del filtro de Kalman, descrito por la ecuación (4), como son las matrices *QN* y *RN*, las cuales deben estar almacenadas en sus respectivos archivos de extensión *.mat*.

Toda la información solicitada se debe introducir en los campos apropiados, tal y como muestra la figura 2.

Figura 2. Modelo del sistema y filtro de Kalman.

## 2.2 PARÁMETROS DEL CONTROLADOR PREDICTIVO.

El otro conjunto de elementos fundamentales para implementación del control son los referentes a los parámetros de configuración del controlador predictivo.

Por un lado, se encuentran las matrices de ponderación del índice de coste de la ecuación (1). El usuario debe aportar el nombre de las matrices *Q* y *R*, las cuales deben estar almacenadas en sus respectivos archivos de extensión *.mat*. Por otro se debe indicar cuál es el horizonte de predicción y el horizonte de control que el usuario desea utilizar en el diseño del controlador predictivo.

Por último, se deben aportar las matrices que definen las restricciones de los estados, acciones de control y salidas.

$$\begin{aligned} a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ \vdots \\ a_N \leq x_N \leq b_N \end{aligned} \Rightarrow RESX = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_N & b_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1 \leq u_1 \leq d_1 \\ \vdots \\ c_M \leq u_M \leq d_M \end{aligned} \Rightarrow RESU = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ \vdots & \vdots \\ c_M & d_M \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} e_1 \leq y_1 \leq f_1 \\ \vdots \\ e_P \leq y_P \leq f_P \end{aligned} \Rightarrow RESY = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 \\ \vdots & \vdots \\ e_P & f_P \end{bmatrix}$$

Las matrices *RESX*, *RESU* y *RESY*, también deben estar almacenadas en sus respectivos archivos de extensión *.mat*.

Toda la información solicitada se debe introducir en los campos apropiados, tal y como muestra la figura 3.

Horiz. prediccion	<input type="text" value="10"/>	Horiz. control	<input type="text" value="3"/>
Matriz Q	<input type="text" value="Q"/>	Matriz R	<input type="text" value="R"/>

Restricciones de los estados:	
x1_min	x1_max
x2_min	x2_max
xn_min	xn_max
Matriz restricciones:	<input type="text" value="resx_tanque"/>

Restricciones acc. control:	
u1_min	u1_max
u2_min	u2_max
un_min	un_max
Matriz restricciones:	<input type="text" value="resu_tanque"/>

Restricciones de la salida:	
y1_min	y1_max
y2_min	y2_max
yn_min	yn_max
Matriz restricciones:	<input type="text" value="resy_tanque"/>

Figura 3. Parámetros del controlador predictivo.

### 2.3 ESPECIFICACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS DE REFERENCIA.

La aplicación permite determinar qué trayectoria deben de seguir las salidas del sistema. Éstas se especifican mediante la utilización de los comandos que muestra la figura 4.

<b>REFERENCIA</b>		<input type="radio"/> Punto equilibrio <input checked="" type="radio"/> Seguimiento Ref.
<input checked="" type="radio"/> ESCALON <input type="radio"/> PULSOS <input type="radio"/> SENOIDAL	<input type="text" value="0.0"/> <input type="text" value="0.0"/> <input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="2"/> <input type="text" value="45.0"/> <input type="text" value="10.0"/>
<input type="text" value="0.0"/> <input type="text" value="0.0"/> <input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="40"/> <input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="1"/> <input type="button" value="Fijar"/> <input type="button" value="Eliminar Ref."/>
<input type="button" value="START"/>		

Figura 4. Establecimiento de referencias.

La aplicación ofrece la posibilidad de realizar dos tipos de control:

- Regulación de los estados al punto de equilibrio.
- Seguimiento de referencias.

Estas dos posibilidades se indican en el control que se muestra seguidamente.

<input type="radio"/> Punto equilibrio <input checked="" type="radio"/> Seguimiento Ref.
---------------------------------------------------------------------------------------------

La selección *Punto de equilibrio* desecha cualquier referencia fijada por el usuario, determinando como objetivo de control llevar los estados del sistema al punto de equilibrio.

La selección *Seguimiento Ref.* marca como objetivo de control el que las salidas del sistema sigan a la referencia. Como se puede apreciar, el usuario puede seleccionar una trayectoria escalón, senoidal o un tren de pulsos. Debiendo indicar cada uno de los parámetros característicos de este tipo de señales. Asimismo el usuario debe indicar el periodo de muestreo al que trabajará el sistema y tiempo máximo de simulación.

Se debe tener en cuenta que los procesos con los que se trabaja son de carácter MIMO, por lo que se deben especificar tantas trayectorias de referencia como salidas. Por ello el usuario debe especificar cuántas salidas tiene el sistema, y posteriormente seleccionar en el menú desplegable la salida que se va a configurar. Fijando la trayectoria deseada mediante el botón "Fijar".

Por último destacar, que para la introducción de nuevas trayectorias se debe realizar un borrado previo de las ya establecidas; esto es gestionado por el botón "Eliminar Ref." que permite eliminar todas las referencias asignadas a las salidas en experimentos anteriores.

### 2.4 VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS.

La aplicación presenta dos gráficas con los resultados de la simulación del bucle cerrado (figura 5).

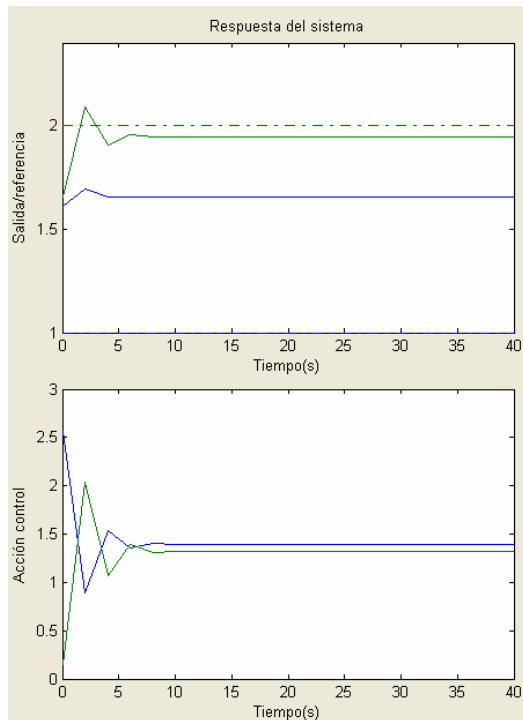


Figura 5. Visualización resultados.

La gráfica superior muestra las diferentes salidas del sistema así como las trayectorias de referencia de las mismas, las cuales se presentan en el mismo color que las salidas, pero con trazos discontinuos.

La gráfica inferior muestra las acciones de control aplicadas al sistema.

### 2.5 EJEMPLOS Y AYUDA.

La aplicación presenta además una barra de menú en la que se presentan diferentes opciones, (figura 7).

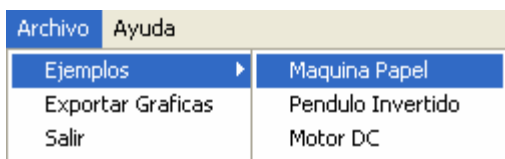


Figura 7. Barra de menús.

Se pueden seleccionar una serie de ejemplos, los cuales configuran automáticamente todo la aplicación, a falta de que el usuario introduzca el tipo de control que se desea realizar, debiendo de fijar las trayectorias en el caso de desear un control de seguimiento de referencias.

Con la opción de menú *Exportar Gráficas*, el usuario puede enviar la información que presentan las gráficas de resultados a una nueva figura de MATLAB, para ser utilizar los resultados en la realización de memorias, informes, etc.



Por último destacar la existencia de dos tipos de ayuda. La primera de ellas se encuentra en la opción *Documentos de ayuda* del menú *Ayuda*. Estos documentos presentan una explicación de cada uno de los campos de la aplicación y se encuentran en formato html, para ser visualizados mediante cualquier navegador web.

En segundo lugar existe un documento de ayuda asociado a cada uno de los ejemplos. Estos documentos se muestran de forma automática una vez se selecciona el ejemplo pertinente. La información hace referencia a todas las cuestiones que envuelven la configuración y propiedades del modelo que se pretende controlar.

## 3. IMPLEMENTACIÓN DE LA APLICACIÓN

El funcionamiento de la aplicación desarrollada se apoya en dos pilares fundamentales:

- Una función para la optimización de la función de coste.
- Una función de cálculo del modelo de predicción.

La función encargada de realizar la optimización con restricciones es *quadprog.m*, la cual se encuentra disponible en el entorno de desarrollo MATLAB. Esta función aplica el algoritmo QP para resolver problemas de minimización con restricciones. El índice genérico que minimiza es el siguiente.

$$J = x^T \cdot H \cdot x + F^T \cdot x \quad (8)$$

$$C \cdot x \leq B$$

Además, se ha implementado una función propia que es capaz de generar el modelo de predicción del sistema, así como calcular todas las matrices necesarias para la función *quadprog.m*. Todos estos cálculos se realizan a partir del sistema y de los parámetros introducidos por el usuario.

La figura 7 muestra un flujograma que clarifica el funcionamiento de la aplicación.

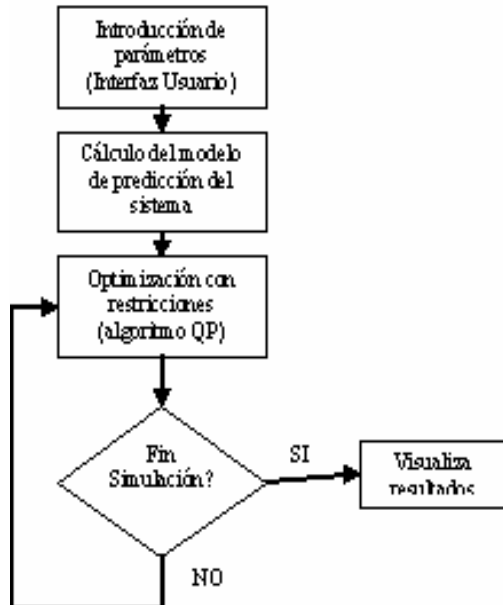


Figura 6. Flujo de funcionamiento de la aplicación.

#### 4. EJEMPLO DE SIMULACIÓN DE UNA MÁQUINA PAPELERA.

El presente apartado muestra la utilización de la aplicación cuando se quiere simular el control predictivo MIMO aplicado a una máquina papelera [5]. (ejemplo que el usuario tiene disponible en la aplicación).

La figura 8, presenta una breve descripción del proceso.

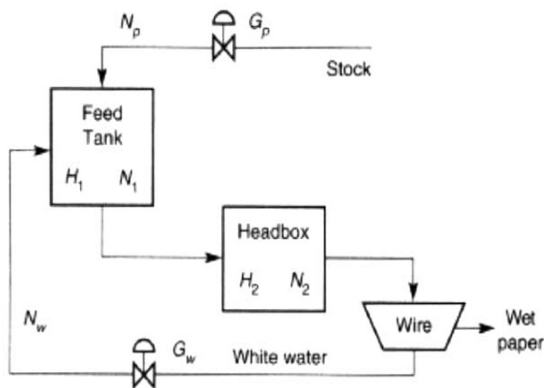


Figura 7. Diagrama de bloques de la máquina papelera.

donde,

- $H_1$  nivel del tanque (no medible).

- $H_2$  nivel de la cabecera (medible).
- $N_1$ , consistencia del producto del tanque (no medible).
- $N_2$ , consistencia del producto de cabecera (medible).
- $G_p$ , flujo de alimentación de materia prima del tanque
- $G_w$ , reflujo de entrada al tanque

El modelo del sistema en espacio de estados, discretizado a un periodo de 2 seg. se muestra en la ecuación (9).

$$\begin{bmatrix} H_1(k+1) \\ H_2(k+1) \\ N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 & 0 \\ 0.11 & 0.43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.10 & -0.67 & 0.3 & 0.43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(k) \\ H_2(k) \\ N_1(k) \\ N_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.65 & 0.65 \\ 0.28 & 0.28 \\ 1.52 & -0.74 \\ 0.99 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_p(k) \\ G_w(k) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} H_2(k) \\ N_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(k) \\ H_2(k) \\ N_1(k) \\ N_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_p(k) \\ G_w(k) \end{bmatrix};$$

Los parámetros que se establecen para el planteamiento del problema de control predictivo se recogen en la tabla 1.

Parámetro	Descripción	Valor
P	Horizonte de predicción. Numero de instantes en los que se obtiene la respuesta estimada del sistema.	10
M	Horizonte de control. Numero de acciones de control futuras que intervienen en la predicción.	3
Q	Matriz de ponderación del error ( $Y_{pred} - Y_{ref}$ ).	$\begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$
R	Matriz de ponderación de las acciones de control.	$\begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}$

RESX	Matriz de restricciones de los estados del sistema.	Para este caso particular RESX se puede dejar a 0 puesto que las restricciones en las salidas son también las de dos estados.
RESY	Matriz de restricciones de las salidas.	$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix}$
RESU	Matriz de restricciones de las acciones de control.	$\begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$
QN	Matriz de covarianzas del ruido blanco V(k)	$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$
RN	Matriz de covarianzas del ruido blanco W(k)	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

Tabla 1. Parámetros del simulador.

La figura 9 muestra los resultados obtenidos tras utilizar los parámetros de la tabla 1, con seguimiento de referencias 5 y 0 para las salidas  $H_2$  y  $N_2$  respectivamente.

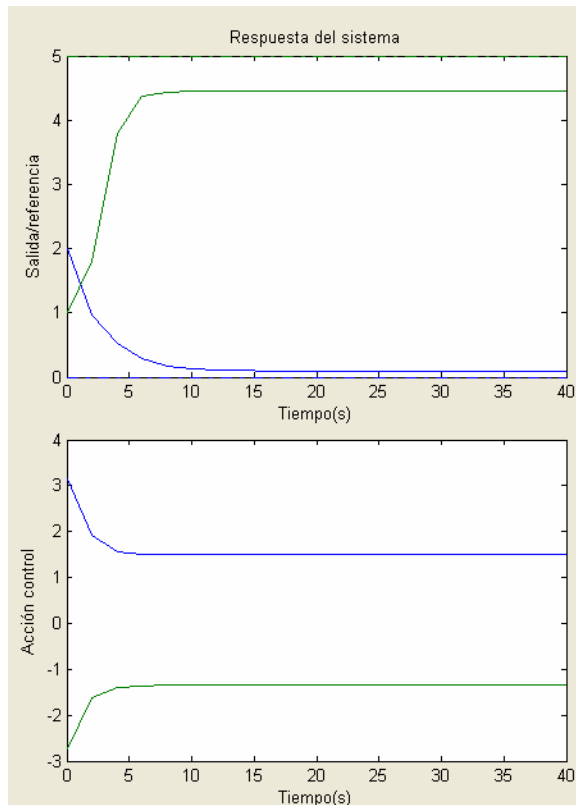


Figura 8. Respuesta del sistema.

Se observa cómo las salidas presentan error en régimen permanente, pese a que ambas siguen las tendencias fijadas por las referencias.

A continuación se varía el peso de la matriz de ponderación de los errores de predicción y se vuelve a simular, con el objetivo de reducir el error en régimen permanente. Los nuevos valores de esta matriz son:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.305 & 0 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

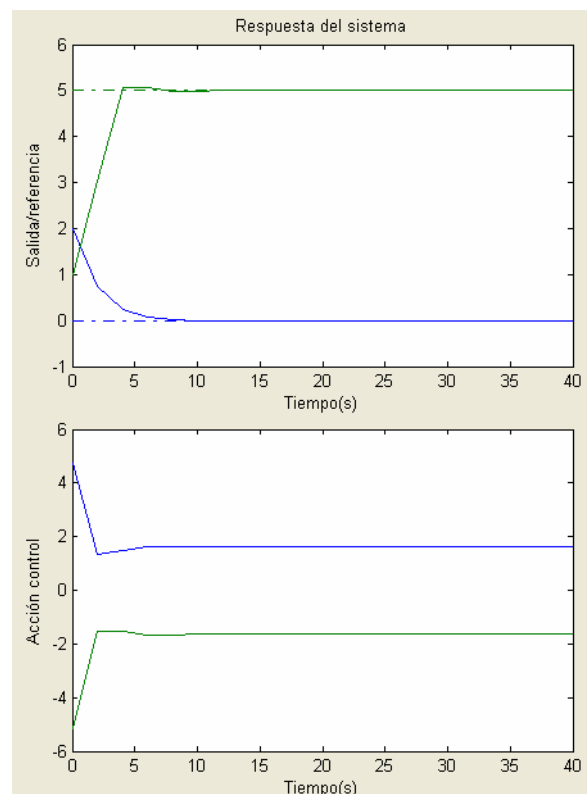


Figura 9. Respuesta del sistema modificada.

La figura 10 muestra como una simple variación en las matrices de ponderación comporta una drástica mejora en las prestaciones del bucle cerrado. De modo que se puede usar el simulador para observar cómo influyen los parámetros del controlador en el bucle cerrado.

## 5. CONCLUSIONES

Este simulador de controladores predictivos en espacio de estados, constituye una herramienta muy práctica para el estudio de la influencia de los parámetros del controlador en las prestaciones de bucle cerrado. El alumno puede encontrar en esta aplicación una primera toma de contacto con este

tipo de controladores, previo paso al desarrollo teórico. Al mismo tiempo éste puede obtener la validación de sus propios diseños de una forma rápida y fiable.

La aplicación desarrollada, pretende seguir los pasos de otras herramientas de aprendizaje interactivo de control predictivo mucho más potentes, como por ejemplo MIMO-GPCIT [4].

### **Agradecimientos**

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por AGL-2002-04108-C02-01 y DPI 2001-3106-C02-02 del MCYT.

### **Referencias**

- [1] Albertos, P. and Sala, A. (2004), Multivariable Control Systems, pp. 197-210.
- [2] Camacho, E.F. and Bordons, C. (1995). Model Predictive Control in the Process Industry. Springer-Verlag.
- [3] Glad, T. and Ljung, L. (1997), Control Theory. Taylor and Fancis, pp. 383-392.
- [4] Guzmán, J.L., Berenguer, M. y Dormido, S. (2004), MIMO-GPCIT. RIAI, v. 1, n. 1. pp. 57-68.
- [5] Maciejowski, J. (2002) Predictive Control with Constraints. Prentice Hall.
- [6] Mathworks. Matlab CD-Suport 2001.