

# MODELADO DE REGULADORES PID MULTIFRECUENCIA

Alfredo Cuesta Infante  
Ing. Téc. Informática de Sistemas, C.E.S. Felipe II (UCM)  
C/ Capitán, 39. 28300 (Aranjuez)  
[acuesta@cesfelipesecondo.com](mailto:acuesta@cesfelipesecondo.com)

Luis Grau Fernández  
Esc. Sup. de Ing. Informática, UNED  
Dept. de Informática y Automática  
C/ Juan del Rosal, Nº 16 . 28040 (Madrid)  
[lgrau@dia.uned.es](mailto:lgrau@dia.uned.es)

## Resumen

*Este artículo propone un modelo para reguladores PID donde cada componente trabaja a una periodo, en general distinto. Se toma como base el PID no interactivo ideal y se utiliza la metodología de operadores de Kranc e introduce una notación conveniente para realizar las transformaciones de matrices que se realizan. El modelo general se puede particularizar a casos más sencillos que responden a situaciones más frecuentes en la industria.*

**Palabras Clave:** Multifrecuencia, PID, Operadores de Kranc, Modelado

## 1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han desarrollado varios tipos de reguladores para resolver o mejorar el desempeño en diversas situaciones en las cuales es necesario, o simplemente ventajoso, muestrear variables diferentes a frecuencias distintas.

Así los controladores MRIC (Multi-rate input controller) [2] se aplican cuando la variable controlada no puede medirse tan rápidamente como la variable manipulada; e.g. en procesos químicos donde el tiempo de respuesta de los analizadores es más lento que el periodo deseado para actualizar la acción de control. El esquema MROC (Multi-rate output controller) [5][6] es menos frecuente que el MRIC pero tiene la ventaja de establecer, bajo ciertas restricciones y una elección apropiada las frecuencias de muestreo, una ley de control con realimentación de la salida, equivalente a la ley de control con realimentación del estado sin necesidad del observador de estados. Ambos reguladores se han diseñado mediante la técnica de modelado de los operadores de Kranc [9][11]. Con la técnica del lifting discreto [8], equivalente a la anterior, también

se han desarrollado esquemas multifrecuencia para el diseño mediante asignación de polos. Salt y Albertos [10] han presentado un método de diseño para reguladores con muestreo no convencional que con el que se pueden diseñar reguladores de tiempo utilizando una metodología similar a la usada en el diseño de filtros FIR. Con esta metodología diseñan también un PID interactivo modelado en dos partes, la primera funciona al periodo del error y la segunda al periodo de la acción de control,  $N$  veces más rápida, con muy buenos resultados. Estos trabajos han sido extendidos por Cuenca [4], que propone diferentes tipos de PID con esquemas de muestreo no convencional sobre los que realiza un exhaustivo análisis.

Debido a la importancia del PID, el 95% de los lazos de control lo incluyen debido a su robustez y versatilidad, resultaría interesante disponer de una metodología sencilla que permitiera tanto el modelado como el análisis y el diseño de PID's multifrecuencia y que además conserve el sentido físico de los parámetros.

En este artículo se presenta un método para modelar un PID multifrecuencia (PIDMF), ya sea interactivo o no interactivo, o presente estructuras alternativas PI-D o I-PD. Para ello se ha elegido la metodología de los operadores de Kranc debido a su versatilidad, sencillez de manejo. Además es fácilmente integrable en herramientas informáticas como Matlab y las expresiones resultantes son de fácil interpretación. El resto del artículo se organiza del siguiente modo: en la sección 2 se resume brevemente la técnica de los operadores de Kranc. En la sección 3 se obtienen las ecuaciones generales del PIDMF. En la sección 4 se particularizan los resultados a diferentes esquemas de muestreo. El artículo se ilustra con un ejemplo en la sección 5 y finalmente se enumeran las conclusiones

*Notación:*

El carácter  $\xi$  representará, en general, cualquiera de los tres componentes del PID siendo reemplazado en cualquier expresión por las letras P, I o D según se pretenda referenciar el componente proporcional, integral o derivativo respectivamente. De este modo la acción de control de un componente cualquiera vendrá representada por  $u_\xi(kT/\xi)$  en el dominio temporal, o por  $U_\xi(z)$  para su transformada Z.

Siempre que se quiera indicar el periodo en una transformada Z, este aparecerá como superíndice, e.g.:  $U_\xi^{T/\xi}(z)$

A lo largo del artículo, por similitud con la *Delta de Kronecker*, toda matriz  $\delta^\xi$ , de dimensiones  $n \times \xi$ , con entradas igual a cero o uno, según una condición dada sobre los índices se llamará *Matriz delta*.

Una señal vectorizada, o bien su transformada Z, se representará subrayada, indicando que esta agrupa varias señales, e.g.  $\underline{u}(kT)$  o  $\underline{U}(z)$  respectivamente.

El superíndice  $t$  tras una matriz indica la operación traspuesta de dicha matriz.

Finalmente  $\lfloor x \rfloor$  representará la parte entera de  $x$ .

## 2 METODOLOGÍA DE OPERADORES DE KRANC

Como prerequisite es necesario que cada periodo se exprese en función de un periodo global o *metaperiodo*,  $T$ ; de modo que cada periodo  $T_i = T/N_i$ , siendo  $N_i$  la *frecuencia de muestreo*.

El punto de partida es la *descomposición vectorial de las conexiones* (DVC), introducida por Kranc [9], mediante la cual un muestreador de periodo  $T/N$  se representa como la superposición de  $N$  muestreadores a periodo  $T$  tal y como muestra la figura 1. La señal  $u(t)$  es primero vectorizada por un array de elementos de adelanto, obteniendo las  $N$  muestras que se medirían en el tiempo que dura el metaperiodo  $T$ . A continuación estas muestras son retrasadas convenientemente de modo que la señal reconstruida, o reducida, es  $u(kT/N)$ ; tal que si:

$$\underline{u}(kT/N) = \{u_0[k], \dots, u_{N-1}[k], \\ , u_0[k+1], \dots, u_{N-1}[k+1], \dots\}$$

entonces el canal  $j$  transmitirá, a periodo  $T$ , la secuencia de valores

$$u_j(kT) = \{u_j[k], u_j[k+1], u_j[k+2], \dots\}$$

y la señal vectorizada  $\underline{u}(kT) = [\underline{u}_1(kT), \dots, \underline{u}_N(kT)]^t$

Por lo tanto cada muestreador a periodo  $T/N$  se puede representar como un bloque de adelanto,  $N^+$ , un muestreador a periodo  $T$  y un bloque de retraso,  $N^-$ ; siendo:

$$N^+ = \left[ 1, e^{s\frac{T}{N}}, e^{s2\frac{T}{N}}, \dots, e^{s(N-1)\frac{T}{N}} \right]^t$$

$$N^- = \left[ 1, e^{-s\frac{T}{N}}, e^{-s2\frac{T}{N}}, \dots, e^{-s(N-1)\frac{T}{N}} \right]$$

Sea  $G$  una planta continua y precedida de un ZOH a periodo  $T/M$ ,  $H_0(s)$ , o discreta, también a periodo  $T/M$ , precedida de un muestreador a periodo  $T/M$ ; y ambas seguidas de otro a periodo  $T/N$ . Aplicando la DVC en ambos tal y como muestra la figura 2 se definen los operadores ZOH Kranc y Kranc digital del siguiente modo:

$$\text{ZOH Kranc, de m a n: } \underline{G}_{m,n}(z) = N^+ G H_0(s) M^-$$

$$\text{Kranc digital, de m a n: } \underline{G}_{m,n}(z) = N^+ G(z) M^-$$

Se definen además los siguientes elementos:

$$\text{Vectorización en m canales de } E(s): \underline{E}(z) = M^+ E(s)$$

$$\text{Reducción de n canales de } \underline{U}(z): U^{T/N}(z) = N^- \underline{U}(z)$$

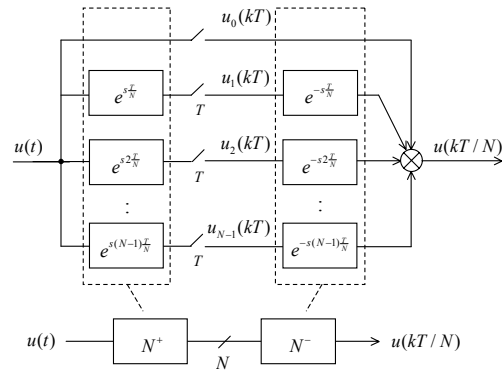


Figura 1. Descomposición vectorial de las conexiones

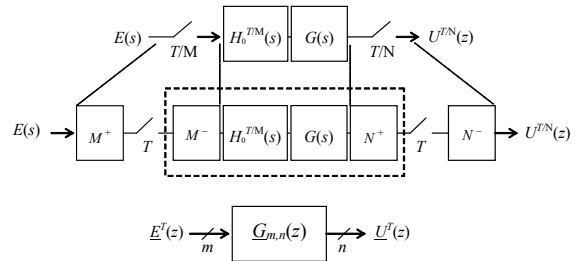


Figura 2. Definición de operador de Kranc

Los otros dos elementos que aparecen en esta metodología son la *matriz de conexión* de  $m$  a  $n$ , y el *repetidor de orden cero* (ZOR).

La matriz de conexión es la unión de un bloque de retraso con un bloque de adelanto siempre que el

número de canales de entrada,  $m$ , sea múltiplo del número de canales de salida,  $n$ , o viceversa

$$X_{m,n} = N^+ M^-$$

Si  $m > n$ , la matriz de transferencia elimina muestras de la señal que recibe, i.e. reduce su frecuencia de muestreo de  $m$  a  $n$ . Por el contrario con  $m < n$  se aumenta la frecuencia introduciendo  $\kappa = n/m$  muestras de valor cero entre dos muestras consecutivas,  $u(kT/m)$  y  $u((k+1)T/m)$ .

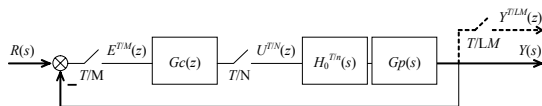
El ZOR también se utiliza para aumentar la frecuencia de  $m$  a  $n$ , siendo  $n = \kappa m$ , sin embargo ahora las muestras introducidas son iguales al valor de  $u(kT/m)$ .

Cuando  $\kappa = n/m$  no es un número entero la conexión del bloque  $M^-$  con  $N^+$  se realiza mediante un *interfaz cambiador de frecuencias* (IFC), definido como la conexión en serie de un ZOR de  $m$  a  $\mu$  y una matriz de conexión de  $\mu$  a  $n$ , siendo  $\mu$  el mínimo común múltiplo de  $m$  y  $n$ .

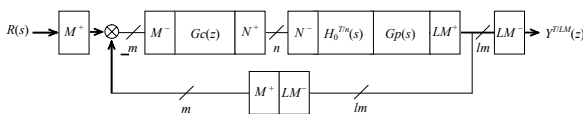
$$ICF_{m,n} = X_{\mu,n} Z_{m,\mu}$$

Las expresiones matemáticas de estos operadores han sido incluidas en el apéndice A y su desarrollo completo se puede encontrar en [3].

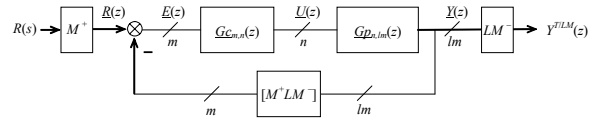
Una vez definidos estos elementos se puede modelar un sistema de control multifrecuencia simplemente transformando cada muestreador mediante la DVC y posteriormente agrupando mediante álgebra de bloques para formar los operadores de Kranc. Es necesario añadir un muestreador ficticio a la salida del proceso, suficientemente rápido como para imitar la salida continua, y que permita formar el ZOH Kranc de la planta y la matriz de conexión de la realimentación. Para ello se elige su frecuencia de muestreo  $L$  veces mayor que la frecuencia de muestreo de la señal de error [1]. En la figura 3 se muestran los pasos principales para modelar un lazo de realimentación unitaria, siendo  $Gc(z)$  el controlador multifrecuencia discreto y  $Gp(s)$  el modelo continuo del proceso.



(3.a)



(3.b)



(3.c)

Figura 3. Modelado de un sistema MF en lazo cerrado con operadores de Kranc

Con la metodología de los operadores de Kranc se modela el sistema SISO multifrecuencia como un sistema MIMO funcionando al metaperiodo  $T$ ; donde se pueden identificar las siguientes matrices de transferencia

cadena directa:

$$\underline{M}_D(z) = \underline{Gp}_{n,lm}(z) \underline{Gc}_{m,n}(z) \quad (1)$$

lazo abierto:

$$\underline{M}_A(z) = X_{lm,m} \underline{Gp}_{n,lm}(z) \underline{Gc}_{m,n}(z) \quad (2)$$

lazo cerrado:

$$\underline{M}_C(z) = (\mathbf{I} + \underline{M}_D(z) X_{lm,m})^{-1} \underline{M}_D(z) \quad (3)$$

### 3 MODELADO GENERAL DEL PIDMF

Se pretende diseñar un nuevo tipo de PID cuyo rasgo diferenciador sea que cada una de sus acciones (proporcional, integral y derivativa) funcione a un periodo diferente:  $T/p$ ,  $T/i$  y  $T/d$ . Dicho PIDMF además tiene la posibilidad de funcionar en modo *monofrecuencia*, si el error y de la acción de control se muestrean al mismo ritmo,  $T/e = T/u$ , o modo multifrecuencia, muestreando la señal de control a un ritmo diferente,  $T/e \neq T/u$ . Todos estos casos se pueden resumir en el esquema mostrado en la figura 4.

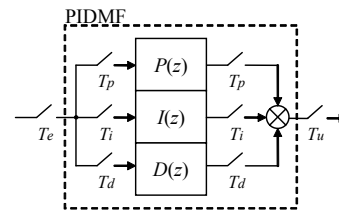


Figura 4. Esquema general del PIDMF

Aplicando la DVC en cada muestreador de la figura 3 y agrupando bloques de modo que se formen los correspondientes operadores de Kranc para cada componente se llega al resultado mostrado en la figura 5

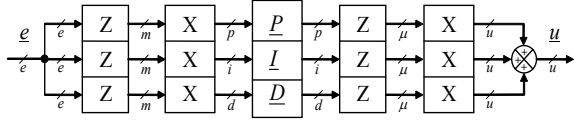


Figura 5. Modelado del PIDMF mediante operadores de Kranc

donde se ha modelado la conexión  $[e^-][\xi^+]$  con un  $ICF_{in} = X_{m,\xi} Z_{e,m}$ , y la conexión  $[\xi^-][u^+]$  con un  $ICF_{out} = X_{\mu,u} Z_{\xi,\mu}$ ; siendo  $m$  el mínimo común múltiplo de  $(e, p, i, d)$ , y  $\mu$  el mínimo común múltiplo de  $(u, p, i, d)$ .

Por lo tanto, la acción de control de un componente del PIDMF viene dada por la expresión:

$$\underline{U}_{\xi}(z) = (X_{\mu,u} Z_{\xi,\mu} \xi(z) X_{m,\xi} Z_{e,m}) \underline{E}(z) \quad (4)$$

y la acción de control del PIDMF será por tanto:

$$\underline{U}(z) = (\underline{U}_p(z) + \underline{U}_i(z) + \underline{U}_d(z)) \underline{E}(z) \quad (5)$$

Utilizando como punto de partida el PID discreto no interactivo (ideal), cuya función de transferencia es

$$PID(z) = Kp + K_I T \frac{z}{z-1} + \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z} \quad (6)$$

y particularizando el periodo de muestreo, cada componente tiene las siguientes representaciones externas e internas:

Proporcional, a periodo  $T/p$ :

$$P^{T/p}(z) = K_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_p \end{bmatrix} \quad (7)$$

Integral, a periodo  $T/i$ :

$$I^{T/i}(z) = K_I \frac{T}{i} \frac{z}{z-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ K_I \frac{T}{i} & K_I \frac{T}{i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Derivativa, a periodo  $T/d$ :

$$D^{T/d}(z) = K_D \frac{d}{T} \frac{z-1}{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_D \frac{d}{T} & K_D \frac{d}{T} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Los operadores de Kranc se obtienen aplicando directamente la fórmula (35), en el apéndice A, sobre (7), (8) y (9), así:

$$\underline{P}(z) = \begin{bmatrix} 0 & [0 \dots 0]_{1 \times p} \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix}_{p \times 1} \quad (10)$$

$$\text{donde } \underline{d}_{ij} = \begin{cases} K_p & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\underline{I}(z) = \begin{bmatrix} 1 & [1 \dots 1]_{1 \times i} \\ [c_i]_{i \times 1} & [d_{ij}]_{i \times i} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\text{donde } \begin{cases} c_i = K_I \frac{T}{i} & \text{para todo } i \\ d_{ij} = \begin{cases} K_I \frac{T}{i} & \text{si } \begin{cases} i-1 \geq j \\ i = j \end{cases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{cases}$$

$$\underline{D}(z) = \begin{bmatrix} 0 & [0 \dots 0, 1]_{1 \times d} \\ [-K_D \frac{d}{T}] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{d \times 1} \quad (12)$$

$$\text{donde } \underline{d}_{ij} = \begin{cases} -K_D \frac{d}{T} & \text{si } j = i-1 \\ -K_D \frac{d}{T} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A efecto de los cálculos posteriores resulta más manejable utilizar la representación externa. Utilizando la conocida expresión

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

se llega a la formulación alternativa:

$$\underline{P}(z) = K_p \cdot \bar{\delta}^p \quad (13)$$

$$\underline{I}(z) = K_I \frac{T}{i} \frac{1}{z-1} \bar{\delta}^{i_1} + K_I \frac{T}{i} \bar{\delta}^{i_2} \quad (14)$$

$$\underline{D}(z) = K_D \frac{d}{T} \bar{\delta}^{d_1} - K_D \frac{d}{T} \bar{\delta}^{d_2} - K_D \frac{d}{T} \frac{1}{z} \bar{\delta}^{d_3} \quad (15)$$

donde el Kranc Digital de cada componente se expresa en función de una o varias matrices delta, cuyas condiciones sobre los índices son:

$$\bar{\delta}_{ij}^p = 1 \Leftrightarrow i = j$$

$$\text{i.e: } \bar{\delta}^p \text{ es la matriz identidad } (p \times p) \quad (16)$$

$$\bar{\delta}_{\bar{j}}^{\bar{i}1} = 1 \Leftrightarrow \forall \bar{i}$$

i.e:  $\bar{\delta}^{\bar{i}1}$  es una matriz ( $i \times i$ ) de unos (17)

$$\bar{\delta}_{\bar{j}}^{\bar{i}2} = 1 \Leftrightarrow \bar{j} \leq \bar{i}$$

i.e:  $\bar{\delta}^{\bar{i}2}$  es una matriz ( $i \times i$ ) triangular inferior de unos (18)

$$\bar{\delta}_{\bar{j}}^{\bar{i}D_1} = 1 \Leftrightarrow \bar{i} = \bar{j}$$

i.e:  $\bar{\delta}^{\bar{i}D_1}$  es la matriz identidad ( $d \times d$ ) (19)

$$\bar{\delta}_{\bar{j}}^{\bar{i}D_2} = 1 \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} - 1$$

i.e:  $\bar{\delta}^{\bar{i}D_2}$  es una matriz ( $d \times d$ ) de ceros excepto las entradas de la 2ª diagonal principal inferior, que son uno (20)

$$\bar{\delta}_{\bar{j}}^{\bar{i}D_3} = 1 \Leftrightarrow (\bar{i}, \bar{j}) = (1, d)$$

i.e:  $\bar{\delta}^{\bar{i}D_3}$  es una matriz ( $d \times d$ ) de ceros excepto el elemento (1,d), que es uno (21)

El modelo de cada componente se calcula sustituyendo  $\bar{\xi}(z)$  en (4) por (13), (14) o (15). Por lo tanto basta calcular como afectan las matrices  $X_{m,\xi}$ ,  $Z_{e,m}$ ,  $X_{\mu,u}$  y  $Z_{\xi,\mu}$  a las matrices delta que aparecen en dichas ecuaciones.

### Proposición 1

Sea el elemento ( $i, j$ ) de la matriz  $\delta = X_{\mu,u} Z_{\xi,\mu} \bar{\delta}^{\xi} X_{m,\xi}$ , dicho elemento será igual a uno si y solo si el elemento ( $\bar{i} = \alpha_{\xi}, \bar{j} = \beta_{\xi}$ ) de  $\bar{\delta}^{\xi}$  es igual a uno y  $\beta_{\xi}$  es entero, siendo

$$\alpha_{\xi} = 1 + \lfloor (i-1)\xi / u \rfloor \quad (22)$$

$$\beta_{\xi} = 1 + (j-1)\xi / m \quad (23)$$

Esta proposición es el resultado de las propiedades X.1, X.2 y Z.1 aplicadas a la matriz  $\bar{\delta}^{\xi}$ .

### Proposición 2

El elemento ( $\bar{i}, \bar{j}$ ) de la matriz  $\bar{\delta}^{\xi}$  es igual al elemento ( $i, j$ ) de la matriz  $\delta^{\xi}$  dado por:

$$i = \left[ 1 + (\bar{i}-1)\frac{u}{\xi}, 1 + (u\bar{i}-1)\frac{1}{\xi} \right] \cap \mathbb{N} \quad (24)$$

$$j = 1 + (\bar{j}-1)\frac{m}{\xi} \quad (25)$$

El resto de los elementos ( $i, j$ ) son iguales a cero

### Demostración:

Supongamos que el elemento ( $\bar{i}, \bar{j}$ ) de matriz  $\bar{\delta}^{\xi}$  es igual a uno. Por la proposición 1 debe haber al menos un par ( $i, j$ ) tal que:

$$\bar{i} = 1 + \lfloor (i-1)\xi / u \rfloor \quad (26)$$

$$\bar{j} = 1 + (j-1)\xi / m \quad (27)$$

Operando en la igualdad (26) se tiene:

$$\bar{i} - 1 = \lfloor (i-1)\xi / u \rfloor$$

$(\bar{i} - 1)$  es por tanto el cociente de dividir  $(i-1)\xi$  entre  $u$  y satisface la ecuación fundamental de la división,  $\xi(i-1) = u(\bar{i}-1) + (\xi(i-1) \bmod u)$ ; de modo que  $u(\bar{i}-1) \leq \xi(i-1) \leq u(\bar{i}-1) + (u-1)$ , de donde se despeja  $\bar{i}$ . Finalmente hay que tener en cuenta que  $\bar{i}$  es el índice de las filas de la matriz  $\bar{\delta}^{\xi}$  y por lo tanto debe ser un número natural.

El valor de  $j$  es inmediato despejándolo de la igualdad (27)

Las ecuaciones (24) y (25) transforman cada elemento de una matriz  $\bar{\delta}^{\xi}$  en uno o varios los elementos de su matriz  $\delta^{\xi}$ . Esta transformación se puede resumir en el siguiente algoritmo:

1. Insertar  $(m/\xi)-1$  columnas de ceros tras cada columna de  $\bar{\delta}^{\xi}$ .
2. Si  $u$  es múltiplo de  $\xi$  copiar cada fila de la matriz obtenida en el paso 1  $u/\xi$  veces. Si no:
  - 2.1. Copiar cada fila de la matriz obtenida en el paso 1  $\mu/\xi$  veces.
  - 2.2. A continuación, empezando por la fila 1, eliminar las  $(\mu/u)-1$  filas siguientes, mantener la fila número  $\mu/u$  y eliminar las  $(\mu/u)-1$  siguientes, etc. Así hasta el final de la matriz.

### Proposición 3

La matriz de transferencia que modela el PIDMF no interactivo (ideal) genérico es:

$$Gc_{p,i,d}^u(z) = R_{\Sigma}^{\kappa}(\delta^p)Kp + R_{\Sigma}^{\kappa}(\delta^{l_1})\frac{K_I T}{i} \frac{1}{z-1} + R_{\Sigma}^{\kappa}(\delta^{l_2})\frac{K_I T}{i} + R_{\Sigma}^{\kappa}(\delta^{D_1})\frac{K_D d}{T} - R_{\Sigma}^{\kappa}(\delta^{D_2})\frac{K_D d}{T} - R_{\Sigma}^{\kappa}(\delta^{D_3})\frac{K_D d}{Tz} \quad (28)$$

donde la operación  $R_{\Sigma}^{\kappa}(\delta^{\xi})$  ha sido definida en la propiedad Z.2. y es el resultado de aplicar el ZOR

$Z_{e,m}$  a las matrices  $\bar{\delta}^{\xi}$  obtenidas según la preposición 2 a partir de las matrices iniciales  $\bar{\delta}^{\xi}$ , siendo  $\kappa = m/e$ .

#### 4 CONSIDERACIONES PRÁCTICAS

En la práctica el caso más frecuente es que el periodo de la señal de error sea al menos dos veces más lento que el periodo de la señal de control. Si se toma el periodo de la señal de error como el metaperiodo entonces este será el más lento de los presentes en el sistema y todos los demás serán fracciones de él. Además es razonable limitar superiormente la frecuencia de muestreo de los componentes del PIDMF con la frecuencia de la acción de control; de modo que  $e = 1 \leq \{p, i, d\} \leq u$

Esta configuración tiene dos ventajas: por un lado simplifica la operación  $R_{\Sigma}^{\kappa=m}(\bar{\delta}^{\xi})$ , que ahora se resume, utilizando la notación de Matlab en:

$$R_{\Sigma}^m(\bar{\delta}^p) = \text{ones}(u,1) \quad (29)$$

$$R_{\Sigma}^m(\bar{\delta}^i) = i * \text{ones}(u,1) \quad (30)$$

$$R_{\Sigma}^m(\bar{\delta}^i) = [1 * \text{ones}(u/i,1); 2 * \text{ones}(u/i,1); \dots; i * \text{ones}(u/i,1);] \quad (31)$$

$$R_{\Sigma}^m(\bar{\delta}^{D_1}) = \text{ones}(u,1) \quad (32)$$

$$R_{\Sigma}^m(\bar{\delta}^{D_2}) = [ \text{zeros}(u/d,1); \text{ones}(u-u/d,1) ] \quad (33)$$

$$R_{\Sigma}^m(\bar{\delta}^{D_3}) = [ \text{ones}(u/d,1); \text{zeros}(u-u/d,1) ] \quad (34)$$

, donde además se ha supuesto que tanto la frecuencia  $i$  como  $d$  son múltiplo de  $u$ . En otro caso el resultado se calcula con la ecuación pues no presenta ninguna ventaja. Además si  $e = 1$  la matriz de transferencia en lazo abierto se reduce a una función de transferencia  $(1 \times 1)$  lo cual reduce la complejidad a la hora de estudiar la estabilidad del sistema o su respuesta en frecuencia.

Cabe destacar que la frecuencia  $p$  se puede tomar siempre igual a 1 ya que la acción proporcional no depende de las muestras pasadas al instante considerado.

El método propuesto es fácilmente implementable una vez determinadas las matrices delta originales de cada componente. Se puede programar tanto las ecuaciones de la transformación, (24) y (25), como las matrices de conexión y ZOR que realizan las

operaciones de inserción y eliminación de filas y columnas.

De este modo el método es válido también con otras estrategias de control. Así, por ejemplo, la figura 6 muestra el modelado de un PIDMF no interactivo (ideal) con estructura PI-D y la figura 7 el modelado de un PIDMF interactivo, donde ahora la componente derivativa tiene la función de transferencia

$$D(z) = 1 + \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z}$$

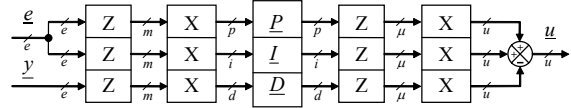


Figura 6. Modelado del PIDMF con estructura PI-D mediante operadores de Kranc

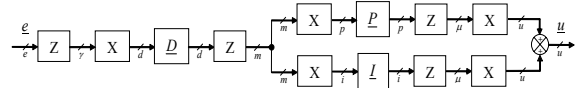


Figura 7. Modelado del PIDMF interactivo Mediante operadores de Kranc

#### 5 EJEMPLOS

Sea un PIDMF no interactivo (ideal) con el siguiente esquema de muestreo:  $e = 1, u = 6, p = 1, i = 3, d = 2$ . Entonces

$$m = m.c.m(1,1,2,3) = 6, \mu = m.c.m(6,1,2,3) = 6$$

El Kranc Digital de cada componente queda caracterizado por sus matrices  $\bar{\delta}$ :

$$\bar{\delta}^p = 1, \bar{\delta}^i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \bar{\delta}^{i_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\delta}^{D_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{\delta}^{D_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\delta}^{D_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Particularizando las ecuaciones (29) a (34) se tiene

$$R_{\Sigma}^m(\bar{\delta}^p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, R_{\Sigma}^m(\bar{\delta}^i) = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, R_{\Sigma}^m(\bar{\delta}^{i_2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$R_{\Sigma}^m(\delta^{D_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, R_{\Sigma}^m(\delta^{D_2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, R_{\Sigma}^m(\delta^{D_3}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz de transferencia del PIDMF queda:

$$Gc(z)_{1,3,2}^6 = \begin{bmatrix} Kp + \frac{K_I T}{3} + K_I T \frac{1}{z-1} + 2 \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z} \\ Kp + \frac{K_I T}{3} + K_I T \frac{1}{z-1} + 2 \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z} \\ Kp + \frac{2K_I T}{3} + K_I T \frac{1}{z-1} + 2 \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z} \\ Kp + \frac{2K_I T}{3} + K_I T \frac{1}{z-1} \\ Kp + K_I T \frac{z}{z-1} \\ Kp + K_I T \frac{z}{z-1} \end{bmatrix}$$

El modelo es una matriz de transferencia cuyos elementos son asimilables a acciones PID con diferentes constantes de tiempo que se suceden secuencialmente con periodo  $T$ .

La restricción de limitar la frecuencia integral o derivativa con la frecuencia de control también se puede eliminar. Es particularmente interesante el caso de que  $e = u = 1$ . En este caso el PIDMF se modela por una sola función de transferencia y la matriz delta general viene determinada por:

$$\delta^{\xi} = X_{m,1} Z_{\xi,m} \bar{\delta}^{\xi} X_{m,\xi}$$

Siguiendo el algoritmo dado en la sección 3, una matriz  $\delta^{\xi}$  dada es igual a la primera fila de la matriz  $\bar{\delta}^{\xi}$  ampliada a  $m$  columnas tras insertar  $m/\xi - 1$  columnas de ceros tras cada columna original de  $\bar{\delta}^{\xi}$ . Por lo tanto cada acción viene caracterizada por:

Proporcional:

$$\delta^p = [1, 0, \dots, 0]_{(1 \times m)}$$

Integral:

$$\delta^{I_1} = [(1, 0, \dots, 0)_{(1 \times m/i)}, \dots, (1, 0, \dots, 0)_{(1 \times m/i)}]_{(1 \times m)}$$

$$\delta^{I_2} = [1, 0, \dots, 0]_{(1 \times m)}$$

Derivativa:

$$\delta^{D_1} = [1, 0, \dots, 0]_{(1 \times m)}$$

$$\delta^{D_2} = [0, 0, \dots, 0]_{(1 \times m)}$$

$$\delta^{D_3} = [(0, 0, \dots, 0)_{(1 \times m/i)}, \dots, (1, 0, \dots, 0)_{(1 \times m/i)}]_{(1 \times m)}$$

De modo que:

$$R_{\Sigma}^m(\delta^p) = 1, R_{\Sigma}^m(\delta^{I_1}) = i, R_{\Sigma}^m(\delta^{I_2}) = 1,$$

$$R_{\Sigma}^m(\delta^{D_1}) = i, R_{\Sigma}^m(\delta^{D_2}) = 0, R_{\Sigma}^m(\delta^{D_3}) = 1$$

y la función de transferencia del controlador es:

$$Gc(z)_{1,i,d}^1 = K_p(1) + \frac{K_I T}{i} \frac{1}{z-1} (i) + \frac{K_I T}{i} (1) + \frac{K_D d}{T} (1) - \frac{K_D d}{T} \frac{1}{z} (1) =$$

$$= K_p + \frac{K_I T}{i} \frac{z+i-1}{z-1} + \frac{K_D d}{T} \frac{z-1}{z}$$

La función de transferencia de este controlador es prácticamente idéntica a la expresión del PID discreto, donde además aparecen los términos de la frecuencia integral y derivativa y la acción integral ya no tiene un cero en el origen.

La función de transferencia se puede reescribir también como:

$$Gc(z)_{1,i,d}^1 = \frac{q_2 z^2 + q_1 z + q_0}{z(z-1)}$$

donde:

$$q_2 = K_p + \frac{K_I T}{i} + \frac{K_D d}{T}$$

$$q_1 = -K_p + K_I T \frac{i-1}{i} - 2 \frac{K_D d}{T}$$

$$q_0 = \frac{K_D d}{T}$$

Los reguladores PIDMF ofrecen una gama más amplia parámetros para ajustar ya que las frecuencias integral y derivativa se suman a los clásicos  $K_p$ ,  $K_I$  y  $K_D$ . Una posible forma de proceder a la hora de ajustar un PIDMF es calcular los parámetros clásicos para los requerimientos especificados utilizando como periodo  $T$ . A continuación aumentar la frecuencia de la señal de control hasta que alcance el valor deseado. A continuación hay que aumentar las frecuencias integral y derivativa para convertir el PID en multifrecuencia y por último habría que reajustar los parámetros para obtener la respuesta deseada o una que la mejore.

Sea por ejemplo la planta continua

$$Gp(s) = \frac{1}{0.26s^2 + 1.26s + 1}$$

En la gráfica 8 se ha dibujado el diagrama de Nyquist utilizando:

1. Un ZOH a periodo  $T=0.15$  y un PID discreto al mismo periodo y  $K_p=5.61$ ,  $K_I=8.87$ ,  $K_D=0.66$

2. Un PIDMF con los mismos parámetros pero  $u = i = d = 6$
3. Un PIDMF con los mismos parámetros pero  $u = 6, i = 2, d = 5$
4. Un PIDMF con el mismo esquema de muestreo que 3 pero ahora  $K_P=7.61, K_I=8.87, K_D=0.66$ , i.e. modificando únicamente la ganancia proporcional.

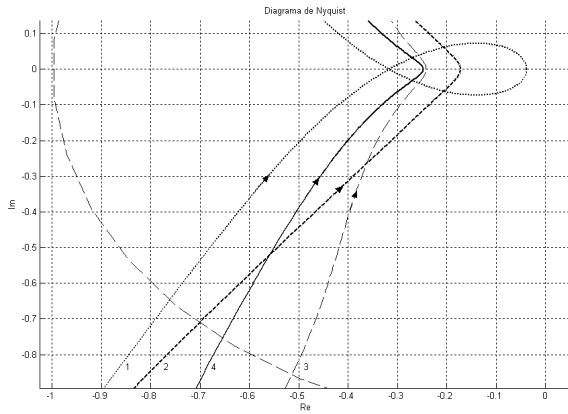


Figura 8. Diagrama de Nyquist de los casos 1, 2, 3 y 4

Se puede apreciar que con el PIDMF del caso 2, con los valores límites de  $i$  y  $d$  para la frecuencia  $u$  dada se tiene mayor margen de ganancia y margen de fase. Modificando las frecuencias del PIDMF, caso 3, se logra un margen de ganancia intermedio entre los dos anteriores y mucho más margen de fase. Finalmente, manteniendo este esquema de muestreo, si se aumenta la constante proporcional se reduce el margen de fase casi sin modificar el margen de ganancia. El aumento de la constante proporcional debería implicar una respuesta más rápida. Para comprobarlo se ha representado la respuesta escalón de los 4 casos en la figura 9. Efectivamente la respuesta en el caso 4 es la más rápida.

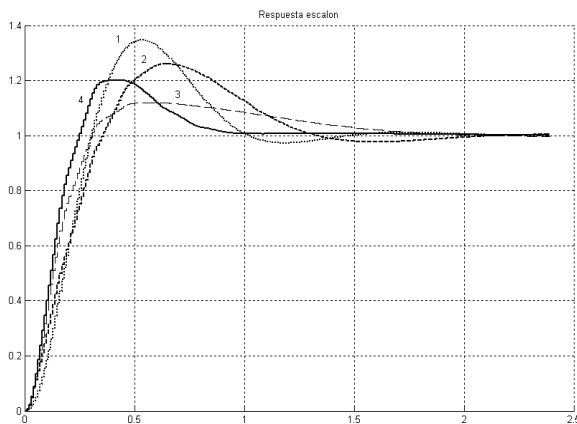


Figura 9. Respuesta escalón de los casos 1, 2, 3 y 4

Si se modifican los parámetros clásicos manteniendo este esquema de muestreo se puede lograr un sistema con el mismo margen de ganancia y de fase, que cumple las mismas especificaciones de sobrelongación que en el caso 1 pero de respuesta más rápida. Así, el un nuevo caso es:

5. Un PIDMF con el mismo esquema de muestreo que 3 pero ahora  $K_P=11.87, K_I=8.87, K_D=0.86$

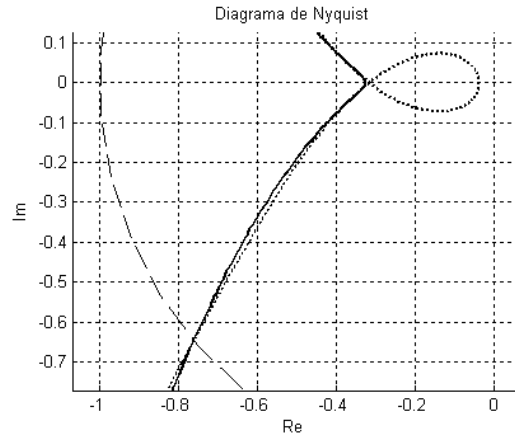


Figura 10. Diagrama de Nyquist de los casos 1 (línea discontinua) y 5 (línea continua)

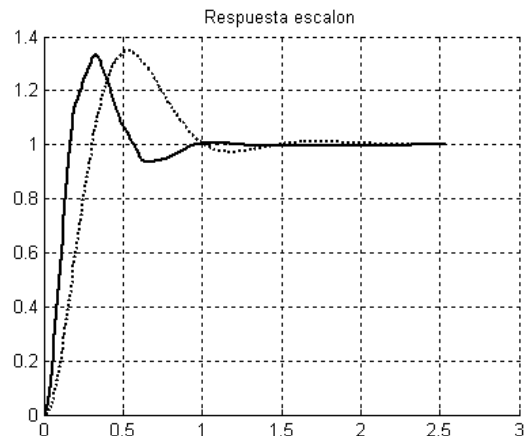


Figura 11. Respuesta escalón de los casos 1 (línea discontinua) y 5 (línea continua)

## Conclusiones

En este artículo se presenta un algoritmo sencillo para modelar un PIDMF, que intrínsecamente es un elemento SISO, como un elemento MIMO funcionando a una única frecuencia. Para ello se ha utilizado la técnica de modelado de los operadores de Kranc y se ha utilizado como base un PID discreto no interactivo (ideal). El modelo resultante se obtiene mediante la inserción y eliminación de filas y columnas en la matriz de transferencia del operador de cada uno de los componentes del PID. La metodología es aplicable a otras estructuras del PID.



El PIDMF tiene seis parámetros que permiten una gran cantidad de posibilidades para realizar la sintonía. Este es un tema abierto a futuros trabajos.

## Referencias

- [1] Anderson, B.D.O.; Keller, J. P. (1994) "Discretization Techniques in Control Systems" *Control and Dynamic Systems*, Vol. 66, pp. 47–93.
- [2] Araki, M.; Hagiwara, T. (1986) "Pole assignment by multirate sampled-data output feedback". *Int. J. Control*, Vol. 44, pp. 1661–1673
- [3] Camiña, C. (1999) "Modelado y respuesta en frecuencia de los sistemas muestreados multifrecuencia". Tesis Doctoral. Departamento de ingeniería de sistemas, Computadores y Automática. Universidad Politécnica de Valencia.
- [4] Cuenca, A. (2004) Tesis Doctoral. Departamento de ingeniería de sistemas, Computadores y Automática. Universidad Politécnica de Valencia.
- [5] Hagiwara, T.; Fujimura, T.; Araki, M. (1990) "Generalized multirate-output controllers". *Int. J. Control*, Vol. 52, No.3, pp.597–612
- [6] Hagiwara, T.; Araki, M. (1988) "Design of a stable state feedback controller based on the multirate sampling of the plant output". *IEEE Trans. on Automatic Control*. Vol. AC-33, No. 9, pp. 812–819.
- [7] In H, Zhang, C. (1994) "A multirate digital controller for model matching". *Automatica*. Vol 30, No.6, pp.1043–1050.
- [8] Khargonekar, P.P.; Poolla, K.; Tannenbaum, A. (1985) "Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation". *IEEE Trans. On Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 11, pp. 1088–1096.
- [9] Kranc, G.M. (1957) "Input-output analysis of multirate feedback systems". *IEEE Trans. on Automatic Control*. Vol. AC-3, pp.21–28
- [10] Salt, J.; Albertos P. (2000) "Multirate controllers design by rate decomposition" *Proc. of 30<sup>th</sup> conference on decision and control*, Sydney.
- [11] Thompson, P.M. (1986) Gain and Phase margins of multirate sampled-data feedback systems. *Int. J. Control*. Vol. 44, No. 3, pp. 833–846

## Apéndice A

Sea  $G(z)$  una planta discreta a periodo  $T/m$  precedida por muestreador a periodo  $T/m$  y seguida de un muestreador a periodo  $T/n$ ; si  $(A, B, C, D)$  es la

transformada Z de la representación en el espacio de estados de  $G(z)$  entonces la expresión del Kranc digital de  $G(z)$  es:

$$\underline{G}(z) = N^+ \left( G^{T/m}(z) \right) M^- = \begin{bmatrix} A^m & A^{m-1}B & A^{m-2}B & \dots & B \\ C_{ij} & & D_{ij} & & \end{bmatrix} \quad (35)$$

donde:

$$C_{ij} = \begin{cases} CA^{(i-1)\frac{m}{n}} & \text{si } (i-1)\frac{m}{n} = \text{entero} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$D_{ij} = \Omega_{ij} + \sum_{q=0}^{n-1} C\Psi_{ij}(q)B$$

$$\Psi_{ij}(q) = \begin{cases} A^r & \text{si } r = q + mi - nj - m \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} D & \text{si } 0 \leq (i-1)m - (j-1)n < n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si se trata de una planta continua precedida de un ZOH a periodo  $T/m$ ,  $H_0(s)$ , y seguida de un muestreador a periodo a periodo  $T/n$ , entonces si  $(A, B, C, D)$  es la transformada Z de la representación en el espacio de estados del modelo discreto de  $GH(s)$  a periodo  $T/k$ , siendo  $k = \text{mínimo común múltiplo}$  de  $m$  y  $n$ . Cuando  $m$  y  $n$  son coprimos la expresión del operador ZOH Kranc es:

$$N^+ \cdot G(s) H_0^{T/m}(s) \cdot M^- = \begin{bmatrix} A^{mn} & \sum_{l=mn-n}^{mn-1} A^l B & \sum_{l=mn-2n}^{mn-n-1} A^l B & \dots & \sum_{l=0}^{n-1} A^l B \\ C & D_{00} & D_{10} & \dots & D_{0,m-1} \\ CA^m & D_{10} & D_{11} & \dots & D_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{mn-m} & D_{n-1,0} & D_{n-1,1} & \dots & D_{n-1,m-1} \end{bmatrix} \quad (36)$$

donde:

$$D_{ij} = \Omega_{ij} + \sum_{q=0}^{n-1} C\Psi_{ij}(q)B$$

$$\Psi_{ij}(q) = \begin{cases} A^r & \text{si } r = q + mi - nj - m \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} D & \text{si } 0 \leq (i-1)m - (j-1)n < n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La matriz de conexión de  $m$  a  $n$ ,  $X_{m,n}$ , siendo  $m$  múltiplo de  $n$  o viceversa, es una matriz de ganancias tal que sus elementos  $x_{ij}$  se definen:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 + (i-1)m/n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (37)$$

La matriz de conexión tiene las siguientes propiedades:

*Propiedad X.1*

Dada una matriz con  $\kappa n$  filas,  $G$ , y una matriz de conexión de  $\kappa n$  a  $n$ ,  $X_{\kappa n, n}$ , sea  $H = X_{\kappa n, n} G$  el resultado de multiplicar por la izquierda a la matriz  $G$  con la matriz de conexión; entonces la fila  $i$  de  $H$  es igual a la fila  $1+(i-1)\kappa$  de  $G$ , con  $1 \leq i \leq n$

*Propiedad X.2*

Dada una matriz con  $n$  columnas,  $G$ , y una matriz de conexión de  $\kappa n$  a  $n$ ,  $X_{\kappa n, n}$ , sea  $H = G X_{\kappa n, n}$ , el resultado de multiplicar por la derecha a la matriz  $G$  con la matriz de conexión; entonces la columna  $j$  de  $G$  es igual a la columna  $1+(j-1)\kappa$  de  $H$ , con  $1 \leq j \leq n$ ; el resto de las columnas de  $H$  tienen todos sus elementos iguales a cero.

El ZOR de  $m$  a  $n$ ,  $Z_{m, n}$ , siendo  $\kappa = n/m$ , es una matriz de ganancias tal que sus elementos  $zor_{ij}$  se definen:

$$zor_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1+(j-1)\cdot\kappa \leq i \leq j\cdot\kappa \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (38)$$

El ZOR tiene las siguientes propiedades:

*Propiedad Z.1*

Dada una matriz con  $n$  filas,  $G$ , y un ZOR de  $n$  a  $\kappa n$ ,  $Z_{n, \kappa n}$ , sea  $H = Z_{n, \kappa n} G$ , el resultado de multiplicar por la izquierda a la matriz  $G$  con el ZOR; entonces la fila  $i$  de  $G$  es igual a las filas comprendidas en el intervalo  $[1+(i-1), i\kappa]$  de  $H$ , con  $1 \leq i \leq n$ .

*Propiedad Z.2*

Dada una matriz con  $\kappa n$  columnas,  $G$ , y un ZOR de  $n$  a  $\kappa n$ ,  $Z_{n, \kappa n}$ , sea  $H = G Z_{n, \kappa n}$ , el resultado de multiplicar por la derecha a la matriz  $G$  con el ZOR; entonces un elemento  $(i, j)$  de la matriz  $H$  es igual a:

$$h_{ij} = \sum_{r=1+(j-1)\kappa}^{j\kappa} g_{ir} ; \text{ con } 1 \leq j \leq n \quad (39)$$

, por lo tanto, dada un fila,  $i$ , de  $H$ , su columna  $j$  se formará sumando las columnas del grupo  $[1+(j-1)\kappa, j\kappa]$ .

El efecto de esta operación es la reducción del número de columnas de la matriz  $G$ . Por esta razón, por conveniencia para cálculos posteriores, se define la transformación *Reducción por columnas mediante sumas*, de  $\kappa n$  a  $n$ , dada por

$$R_{\Sigma}^{\kappa} : Mat_{m \times \kappa n}(\{0,1\}) \rightarrow Mat_{m \times n}(\mathbb{N})$$

, donde  $Mat_{m \times \kappa n}(\{0,1\})$  denota al conjunto de las matrices de dimensiones  $m \times \kappa n$  con entradas en el conjunto  $\{0,1\}$  y  $Mat_{m \times n}(\mathbb{N})$  el conjunto de matrices de dimensiones  $m \times n$  con entradas en el conjunto de los números naturales (incluido el cero); y tal que dada  $A \in Mat_{m \times \kappa n}(\{0,1\})$  entonces  $R_{\Sigma}^{\kappa} A = B$ , donde:

$$b_{ij} = \sum_{r=1+(j-1)\kappa}^{j\kappa} a_{ir} , \quad \forall a_{ij} \in A \text{ y } \forall b_{ij} \in B \quad (40)$$