

ESTUDIO DE LA TÉCNICA FORWARDING $\text{mod}\{L_g V\}$ EN LOS SISTEMAS MECÁNICOS

R. Marichal¹, J. Aracil², F. Gordillo²

¹Dpto. de Física Fund., Exp., Electrónica y Sistemas, Universidad de La Laguna, Tenerife

²Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla, Sevilla
marichal@cyc.ull.es, aracil@esi.us.es, gordillo@esi.us.es

Resumen

En este artículo se plantea una nueva metodología de control no lineal para los sistemas mecánicos basada en la técnica forwarding. El forwarding parte de un subsistema estable, y mediante un procedimiento en cascada estabiliza el sistema a controlar. La mayor dificultad es la necesidad de resolver una ecuación en derivadas parciales (EDP), ya que la solución suele ser difícil de obtener, y en ocasiones, carece de ella. Este trabajo se centra en simplificar dicha EDP, para ello, se analiza la posibilidad de combinar un control basado en pasividad, denominado *interconnection and damping (IDA-PBC)*, cuya función es estabilizar el subsistema inicial, y una variante del forwarding, denominado *forwarding mod{L_gV}*. La nueva metodología propuesta se ha aplicado a un sistema no lineal muy conocido, como es el péndulo invertido.

Palabras clave: Control no lineal, Forwarding $\text{mod}\{L_g V\}$, IDA-PBC.

1 INTRODUCCIÓN

En esta sección se presenta una revisión de la técnica *forwarding* [2], [4]. El objetivo del *forwarding* es estabilizar un sistema en forma de cascada

$$\dot{z} = h(x) + l(x)u \quad (1)$$

$$\dot{x} = f(x) + ug(x)u \quad (2)$$

donde z es un escalar, h , l , f y g son funciones Lipschitz continuas. Por otra parte, en el subsistema (2) el origen en bucle abierto es asintóticamente estable, y, por tanto, existe una cierta función de Lyapunov $V(x)$ cuya derivada de Lie $L_f V$ es negativa para todo $x \neq 0$. Esto es

$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f < 0. \quad (3)$$

El fundamento principal de la técnica es estudiar la existencia de una variedad $z = M(x)$ de C^1 , con $M(0) = 0$. Dicha variedad debe ser estable e invariante en el espacio de estados formado por (x, z) para $u = 0$. Para determinar $M(x)$ es

necesario resolver la EDP

$$L_f M = h(x). \quad (4)$$

En el caso de que se pueda resolver la anterior ecuación se suele plantear una nueva función de Lyapunov correspondiente al sistema completo (x, z) como

$$W = V(x) + \frac{1}{2}(z - M(x))^2. \quad (5)$$

La ley de control tiene que garantizar la semidefinición positiva de la función de Lyapunov W ,

$$\dot{W} = L_f V + [L_g V + (z - M)(l(x) - L_g M)]u < 0$$

En la técnica *forwarding* la ley de control elegida es

$$u = -[L_g V + (z - M)(l(x) - L_g M)] \quad (6)$$

y, por tanto,

$$\dot{W} = L_f V - [L_g V + (z - M)(l(x) - L_g M)]^2 \quad (7)$$

Analizando la derivada de W en $x = 0$

$$\dot{W} = -[L_g V(0) + (z - M(0))(l(0) - L_g M(0))]^2 \quad (8)$$

se plantea una condición adicional

$$L_g M(0) \neq l(0) \quad (9)$$

para que garantizar que (8) sea negativo para todo $z \neq 0$.

2 FORWARDING $\text{mod}\{L_g V\}$

En [11] se ha planteado una alternativa denominada *forwarding mod{L_gV}* que simplifica la solución de la EDP. Esta técnica consiste en modificar la EDP (4) por

$$L_f M = h(x) + k(x)L_g V. \quad (10)$$

En la anterior expresión se ha introducido un grado de libertad, correspondiente a $k(x)$, cuyo objetivo fundamental es simplificar la EDP.

En el trabajo [11] se ha planteado la técnica considerando que en el sistema el término $l(x)$ de la ecuación de evolución (1) es nulo. Por esta razón en esta sección se extenderá los resultados obtenidos en [11] al caso más general.

Considerando la nueva EDP (10) la derivada de la función de Lyapunov $W(z, x)$ dada por la expresión (5) es

$$\dot{W} = L_f V + dW_u u - k(z - M)L_g V,$$

donde

$$dW_u = L_g V + (z - M)(l(x) - L_g M).$$

En la anterior expresión se puede observar como al plantear la EDP modificada se ha introducido un término adicional con respecto a la ecuación (7), por tanto, es necesario redefinir la ley de control dada por (6). Para ello, se plantean distintos casos posibles suponiendo en todos que $L_f V < 0$ para todo $x \neq 0$

- i) Si $k(x) = 0$. Este caso coincide con el *forwarding* descrito en la sección de introducción.
- ii) $k(x) \neq 0$, $L_g M(x) = l(x)$ para todo $x \neq 0$ y suponiendo que se cumple (9). Entonces

$$u = k(x)(z - M(x))$$

y

$$\dot{W} = L_f V < 0.$$

- iii) $k(x)(l(x) - L_g M(x)) \leq 0$, para este caso

$$u = k(x)(z - M(x))$$

y

$$\dot{W} = L_f V + k(x)(l(x) - L_g M(x)) < 0.$$

- iv) $k(x)(l(x) - L_g M(x)) > 0$, para este caso

$$u = \frac{k(x)L_g V}{l - L_g M} - dW_u$$

y

$$\dot{W} = L_f V + \frac{k(L_g V)^2}{l - L_g M} - dW_u^2.$$

Como se puede observar en el caso **iv**) es necesario garantizar una condición adicional

$$L_f V + \frac{k(L_g V)^2}{l(x) - L_g M} \leq 0 \quad (11)$$

Esta condición suele ser especialmente problemática para los sistemas en los que $L_f V = 0$. De hecho la anterior expresión es una restricción sobre $k(x)$. En la siguiente sección se analiza la técnica IDA-PBC que trata de garantizar que $L_f V \leq 0$, estabilizando de esta manera el subsistema x .

3 ESTUDIO DEL IDA-PBC

Esta técnica es una variante de los controladores basados en pasividad [6]. El objetivo del IDA-PBC [7], [9] es conseguir que el sistema con estructura Hamiltoniano se comporte, en lazo cerrado, como un sistema equivalente con un determinado Hamiltoniano deseado. En esta sección se expone como se aplica dicha técnica al caso de un sistema mecánico con un grado de libertad.

En general, los sistemas mecánicos tienen estructura Hamiltoniana sí no se considera el amortiguamiento natural

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2M(q)} + V(q) \quad (12)$$

donde p , q corresponden a la posición y momento generalizado, respectivamente. El término $M(q) > 0$ se denomina matriz de inercia, y $V(q)$ es la energía potencial. En el caso de un sistema mecánico con un grado de libertad, $M(q)$ se reduce a un escalar (la masa). La ecuación de evolución del sistema viene dada en función de H .

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(q) \end{bmatrix} u \quad (13)$$

Debido a la forma del Hamiltoniano (12) se puede plantear la función de energía deseada en lazo cerrado como

$$H_d(q, p) = \frac{p^2}{2M_d(q)} + V_d(q), \quad (14)$$

donde $M_d > 0$ y V_d corresponden a la matriz de inercia y energía potencial deseadas, respectivamente. Debido a la forma de (14) se debe cumplir que V_d tenga un mínimo en el punto de equilibrio deseado $(q^*, 0)$.

Consideremos la dinámica del sistema Hamiltoniano generalizado deseado [8]

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_p \\ -M_p & -R_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde $R_d > 0$ y

$$M_p = \frac{M_d}{M}.$$

Para lograr que el sistema mecánico en lazo cerrado sea equivalente, desde el punto de vista dinámico, al deseado es necesario que las ecuaciones de evolución (13) y (15) coincidan,

$$\begin{aligned} \nabla_p H &= M_p \nabla_q H_d \\ gu &= \nabla_q H - M_p \nabla_q H_d - R_d \nabla_p H_d \end{aligned} \quad (16)$$

Esta asignación determina una relación entre las contribuciones cinéticas de las funciones de energía y la ley de control necesaria para estabilizar el sistema. Los controladores PBC [7] se suelen descomponer en dos términos, uno correspondiente al moldeo de energía y otro a la inyección de amortiguamiento. La primera contribución modifica la energía con el objetivo de que el punto de equilibrio sea estable, y la segunda garantiza que dicho punto sea asintóticamente estable.

4 ESTUDIO IDA-PBC Y $\text{mod}\{\mathbf{L}_g \mathbf{V}\}$

Para estudiar el *forwarding* en el caso de los sistemas mecánicos es necesario plantear la evolución dinámica del sistema en términos de estructura en cascada, dada por las expresiones (1) y (2). Para ello, se considera que x es de dimensión dos, y coincide con la composición de un momento p y variable generalizada q , por otra parte, z se asigna a otra variable del sistema mecánico cuyo orden es mayor que dos,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= h(x) + ul(x) \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{x_1} H \\ \nabla_{x_2} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix} u, \end{aligned}$$

donde H coincide con (12). Utilizando la técnica IDA-PBC para el subsistema correspondiente a x ,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= h(x) + ul(x) \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & M_p \\ -M_p & R_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{x_1} H_d \\ \nabla_{x_2} H_d \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Se puede elegir la función de energía deseada H_d (15) como función de Lyapunov V del subsistema x , ya que

$$L_f V = L_f H_d = -k_v g^2 \nabla_{x_1} H_d^2 < 0 \quad (18)$$

y, por tanto, verifica una de las condiciones necesarias para aplicar la técnica *forwarding*. Por otra parte, existe una relación explícita de $L_g V$ con los

términos que aparecen en la ecuación de evolución del sistema deseado (4).

$$L_g V = g \nabla_{x_2} H_d$$

Podemos utilizar esta última relación para determinar la variedad definida en la ecuación (10). Separando los términos que dependen de $L_g V$ y el resto se deduce la expresión de $k(x)$ y la EDP que determina la variedad.

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{1}{g M_p} \frac{\partial M}{\partial x_1} - k_v (L_g M - l) \\ \frac{\partial M}{\partial x_2} &= -\eta(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (19)$$

donde

$$\eta(x_1, x_2) = \frac{hg + l(-M_p \nabla_{x_1} H_d + \nabla_{x_1} H)}{g M_p \nabla_{x_1} H_d}$$

La EDP correspondiente a la ecuación (4) se ha transformado en la EDP (19), reduciéndose de esta manera el orden de la ecuación diferencial. Por tanto, para obtener la solución que determina la variedad sólo es necesario hacer una integral.

$$\varphi(x_1, x_2) = \int \eta(x_1, x_2) dx_2 + \phi(x_1)$$

donde $\phi(x_1)$ corresponde al grado de libertad que aparece en la integración.

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, k y la variedad M vienen dadas por

$$\begin{aligned} k &= \beta(x_1, x_2) + k_v (l - L_g M) \\ M(x_1, x_2) &= \varphi(x_1, x_2) + \phi(x_1) \end{aligned}$$

donde

$$\beta(x_1, x_2) = \frac{1}{g M_p} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \phi'(x_1)$$

La función de Lyapunov W correspondiente al sistema completo (5) debe de ser definida positiva, por tanto, es necesario que $k(l - L_g M) \leq 0$ en caso iii) de la técnica $\text{mod}\{\mathbf{L}_g \mathbf{V}\}$ o que se cumpla la condición (11) correspondiente al caso iv). Debido a que $k_v \geq 0$, la primera condición es más restrictiva que la segunda. Por tanto, centremos el análisis en el caso iv) y en la desigualdad (11). Considerando (18) y la expresión de k dicha expresión se transforma en

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{\beta(x_1, x_2)}{l - L_g M} \leq 0 \quad (20)$$

En este caso la relación anterior define un conjunto de puntos Ω .

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | \gamma(x_1, x_2) \leq 0\}$$

Se puede utilizar el grado de libertad, correspondiente a la función $\phi(x_1)$, para moldear la frontera del conjunto anterior. Por otro lado, el punto de equilibrio correspondiente al origen tiene que estar incluido en la región Ω , esto plantea una condición necesaria sobre la derivada de la función ϕ evaluada en el origen.

$$\phi'(0)\chi(0) \leq -\chi(0) \frac{1}{g(0)M_p(0)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right]_{x=0} \quad (21)$$

donde $\chi(0)$ representa el signo de $l(0) - L_g M(0)$.

La derivada de la función de Lyapunov tendría W dos contribuciones negativas dentro del conjunto Ω .

$$\dot{W} = \gamma(L_g V)^2 - [L_g V + (z - M)(l - L_g M)]^2 \quad (22)$$

Se puede observar que la expresión anterior es análogo a la (7) correspondiente al *forwarding*, salvo que aplicando la técnica $\text{mod}\{L_g V\}$ aparece el término de disipación $L_g V$ modulado por una función que depende de la posición en el espacio de estados. Por otra parte, la forma de la derivada en el tiempo de W permite verificar más fácilmente el principio de invarianza de LaSalle [3], que plantea que sí el conjunto de puntos invariantes donde $\dot{W} = 0$ se reduce al punto de equilibrio entonces dicho punto es asintóticamente estable. Por tanto, suponiendo la condición (9) el conjunto invariante debe cumplir dos condiciones más simples.

$$L_g V = 0 \quad (23)$$

$$z = M(x) \quad (24)$$

En cuanto dominio de atracción del punto de equilibrio estable, una estimación conservadora sería la intersección del conjunto Ω con el conjunto de puntos que están dentro de una curva de nivel correspondiente a la función de Lyapunov W . De hecho, debido a la forma de definir W estas curvas de nivel coinciden con las de V , y, por tanto, la intersección se puede analizar en el espacio de las x . Por otra parte, el dominio de atracción va a depender de $\phi(x_1)$ como se pondrá de manifiesto en el problema del péndulo invertido plano.

5 PÉNDULO INVERTIDO PLANO

El péndulo invertido plano es uno de los sistemas más ampliamente estudiado en la literatura [5]. Este sistema está formado por una articulación sobre un carro que se mueve horizontal. Un modelo simple de este sistema se puede observar en la figura 1, donde M representa la masa del carro, m la masa de la articulación concentrada en la parte superior, θ el ángulo respecto a la vertical y l la longitud del brazo. Haciendo una linealización parcial [10] las ecuaciones del sistema normalizadas son

$$\dot{x}_3 = u \quad (25)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (26)$$

$$\dot{x}_2 = \text{sen}x_1 - \cos x_1 u, \quad (27)$$

donde x_1 representa el ángulo θ , x_2 la velocidad angular $\dot{\theta}$, x_3 la velocidad del carro, y u la acción de control.

Considerando que $z = x_3$ y $x = [x_1, x_2]$ el sistema tiene estructura *forwarding*, dada por las expresiones (1) y (2).

El objetivo de la ley de control es estabilizar el origen teniendo en cuenta que la articulación comienza por encima de la horizontal, esto es, $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

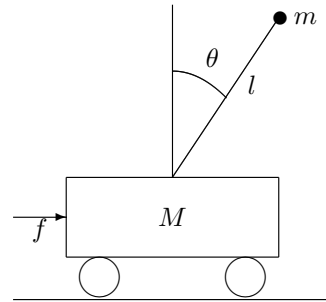


Figura 1: Péndulo sobre el carro.

El subsistema x tiene un punto de silla situado en el origen, por tanto, el primer objetivo es buscar una función de energía deseada que tenga como punto de equilibrio estable el origen, para ello se puede plantear una cierta función de energía deseada donde se moldea la energía potencial,

$$H_d = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1.$$

La función de energía potencial deseada $V_d = -\cos x_1$ tiene un punto de equilibrio en el origen, este es único en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

La ley de control, aplicando IDA-PBC al subsistema péndulo, viene dada por (16),

$$u = 2 \tan x_1 + k_v x_2 \cos x_1.$$

El primer término de la derecha corresponde al moldeo de energía y el segundo a la inyección de amortiguamiento.

La ecuación de evolución del sistema es

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= 2 \tan x_1 - k_v x_2 \cos x_1 + v \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\text{sen} x_1 - k_v x_2 \cos^2 x_1 - \cos x_1 v \end{aligned}$$

donde v representa el resto del comando a determinar.

Aplicando el *forwarding* mod $\{L_g V\}$ y considerando que $L_g V = -x_2 \cos x_1$, la EDP (10) correspondiente

$$\begin{aligned} \frac{-L_g V}{\cos x_1} \frac{\partial M}{\partial x_1} + (-\text{sen} x_1 + k_v L_g V \cos x_1) \frac{\partial M}{\partial x_2} &= \\ &= 2 \tan x_1 - k_v L_g V + k L_g V \end{aligned}$$

Agrupando los términos en $L_g V$ se obtiene la EDP

$$-\text{sen} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_2} = 2 \tan x_1 \quad (28)$$

y

$$k = -\frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{1}{\cos x_1} - k_v$$

Resolviendo la ecuación (28)

$$M(x_1, x_2) = \frac{-2x_2}{\cos x_1} + \phi(x_1) \quad (29)$$

La expresión de k es

$$k = k_v + \beta(x_1, x_2)$$

donde

$$\beta(x_1, x_2) = \frac{1}{\cos x_1} \left(\frac{2x_2 \text{sen} x_1}{\cos^2 x_1} - \phi'(x_1) \right).$$

La frontera $x_2 = \xi(x_1)$ de la región definida por la condición (20) depende de la elección de $\phi(x_1)$,

$$x_2 = \xi(x_1) = \frac{\phi'(x_1) \cos^2 x_1}{2 \text{sen} x_1}.$$

Sin considerar la influencia de la función ϕ se puede observar en los valores frontera $x_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ se anula ξ , por tanto, sería conveniente diseñar la función para evitar esta circunstancia,

$$\phi'(x_1) = \frac{K_0}{\cos^2 x_1}$$

donde K_0 es una constante correspondiente al controlar y debe ser negativa para que se cumpla la condición necesaria (21).

La expresión final de la variedad M dada por (29) viene dada por

$$M(x_1, x_2) = \frac{-2x_2}{\cos x_1} - K_0 \tan x_1.$$

Teniendo en cuenta la expresión de la variedad M obtenida en [1] con el *forwarding* (4), se observa que la expresión obtenida de la variedad mediante el nuevo método es más sencilla y no tiene problemas de divergencia en la curva de nivel $V = 0$.

En la figura 2 se representan la frontera del conjunto Ω , dado por la curva $\xi(x_1)$, y los niveles de energía E_0 de la función de Lyapunov V . En dicha figura se puede observar cuanto mayor es K_0 mayor será el dominio de atracción del punto equilibrio estable. Se puede determinar la relación entre el valor del parámetro del controlador K_0 mínimo y el nivel de energía E_0

$$|K_{0_{min}}| = \frac{1 - \alpha(E_0)}{\sqrt{\alpha(E_0)}}$$

donde

$$\alpha(E_0) = \frac{-E_0 + \sqrt{E_0^2 + 3}}{3}$$

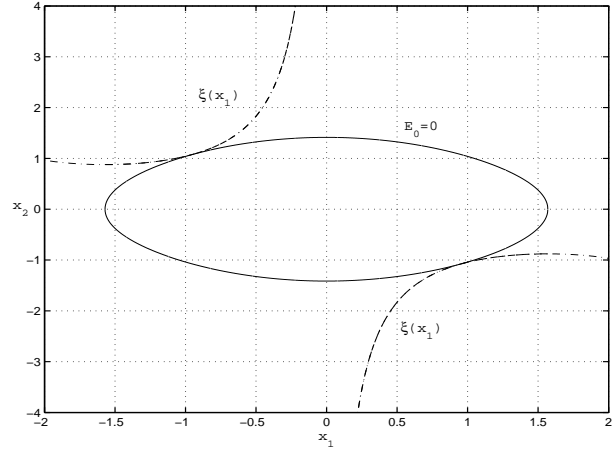


Figura 2: Espacio de estados en el plano (x_1, x_2) , donde las curvas $V = 0$ y $\xi(x_1)$ se representan en trazo continua y discontinua, respectivamente.

Una relación más conservadora respecto a K_0 , pero más sencilla, sería que $K_0 = \phi(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2(E_0 + 1)}$. Esta última relación permite determinar el dominio de atracción del punto de equilibrio estable en función del parámetro del controlador.

Para verificar la estabilidad de la ley de control dentro el conjunto Ω verifiquemos que se cumple el

principio de invarianza de LaSalle. Considerando las igualdades (23) y (24) se deduce que $x_2 \equiv 0$ y $x_3 \equiv \tan x_1$, respectivamente. Por otro lado, teniendo en cuenta las ecuaciones del sistema (26), (25) y las anteriores relaciones se deduce que el comando $u = 0$, luego la ecuación de evolución del sistema (27) se reduce a

$$\dot{x}_2 = \text{sen}x_1 = 0$$

y, por tanto, $x_3 = 0$ y $x_1 = 0$.

Las figuras 3 y 4 representan la evolución temporal de las variables de estado y la función de Lyapunov W del sistema completo, respectivamente. Por otra parte, en la figura 5 se representa la función β que representa la condición (11), como se puede observar siempre se mantiene en valores positivos a lo largo de la simulación.

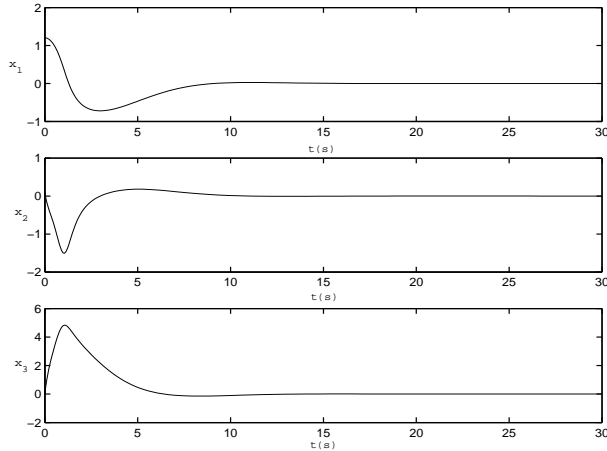


Figura 3: Simulación de el sistema considerando $x_{10}=1.2$, $x_{20}=0.1$, $x_{30}=0$, $K_0=-1.8$.

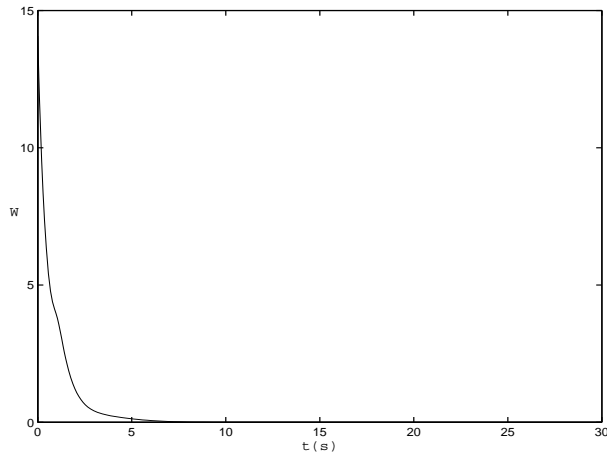


Figura 4: Evolución de la función de Lyapunov W .

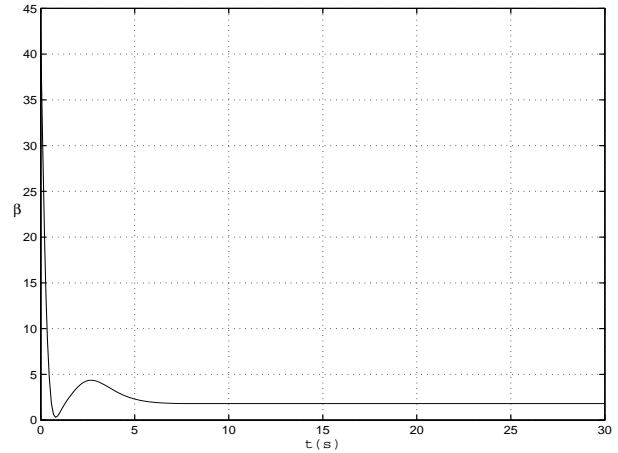


Figura 5: Evolución de la función β .

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha analizado la técnica *forwarding* L_gV para los sistemas mecánicos. Se ha observado que al utilizar el IDA-PBC, para estabilizar el primer sistema en el proceso de cascada del *forwarding*, aparece explícitamente la disipación L_gV en la EDP correspondiente. Por otra parte, se ha comprobado que la solución de dicha EDP es simple, apareciendo un grado de libertad en la solución. Este grado de libertad permite determinar la frontera de los puntos que cumplen la condición (11) necesaria para que la función de Lyapunov propuesta sea semidefinida positiva. Esta metodología se ha aplicado a un ejemplo de referencia en los sistemas subactuados como es el del péndulo invertido plano. La ley de control obtenida es más sencilla y no tiene problemas de divergencia como en el caso de las leyes obtenidas mediante el *forwarding*. En general, la metodología propuesta permite obtener un controlador sencillo que garantiza la convergencia asintótica al punto de equilibrio en una cierta región de trabajo deseada.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Gobierno de Canarias por la financiación de la estancia de R. Marichal, la cual ha permitido realizar este trabajo. El primer autor agradece la hospitalidad del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla. El segundo y tercer autores trabajan en el proyecto CICYT DPI2003-00429.

Por último, los autores agradecen los comentarios de Fabio Gómez-Estern a un borrador de este artículo.

Referencias

- [1] Gordillo, F. , Salas, F., Aracil, J. “A forwarding controller for the pendulum in a cart”, Proceedings CONTROLLO 2004, pp. 79-84.
- [2] Jankovic, M., Sepulchre, R., y Kokotovic, ”Constructive Lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems”, (1996) *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, pp. 1723-1735.
- [3] Khalil, H. *Nonlinear systems*,(2002) Prentice-Hall, Third Edition.
- [4] Mazenc, F., Praly L. “Adding intergrations, saturated controls and global asymptotic stabilization for feedforward systems”(1996) , *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, pp. 1559-1578.
- [5] Ogata, K. Modern Control Engenieering. (2002) Prentince Hall. 4 Ed.
- [6] Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P.J. y Sira-Ramirez, H. “Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems”(1998),Springer-Verlag, London.
- [7] Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke B., Escobar, G. (2002) “Stabilization of port-controlled Hamiltonian systems: Energy-balancing and passivation”,*Automatica*, vol. 38, no.4.
- [8] Ortega, R., Spong, Mark W., Gómez-Estern, F., Blankenstein, G. (2002) “Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems Via Interconnection and Damping Assignment”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 47(8), pp. 1218-1233.
- [9] Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke B., Escobar, G. (1999) “Stability and Stabilization of Nonlinear Systems. D. Aeyels, F. Lamnabhi-Lagarigue, y A. van der Schaft. Eds. London, Uk., Springer-Verlag. LNCIS. vol.246.
- [10] Spong, M. W, (1996) “Energy based control of a class of underactuated mechanical systems” , *Proc. of the 13th IFAC World Congress*, San Francisco. USA. pp: 431-435.
- [11] Praly, L., Ortega, R.,y Kaliora, G. (1996) “Stabilization of nonlinear systems via forwarding mod L_gV ”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46(1), pp. 1461-1466.