

Control Longitudinal de un Helicóptero de Laboratorio vía Backstepping Aproximado Constructivo

M.López-Martínez y F.R.Rubio

Dpto.Ingeniería de Sistemas y Automática.

Universidad de Sevilla. Escuela Superior de Ingenieros.

Teléfono: +34 95 4487361. Fax: +34 95 4487340

correo electrónico: {mlm}@cartuja.us.es

Resumen

Este artículo presenta el diseño de un controlador obtenido mediante funciones de Lyapunov, el cual es aplicable a una clase de sistemas subactuados no linealizables por realimentación en algún punto de funcionamiento. En particular se aplicará para controlar el movimiento longitudinal de un helicóptero de laboratorio. El sistema longitudinal se caracteriza por ser un sistema electro-mecánico no-lineal y subactuado. La metodología propuesta de Backstepping aproximado constructivo consiste en modificar el modelo mediante una sobreparametrización, de tal forma que se pueda aplicar la teoría de Backstepping al sistema subactuado aproximado. El buen comportamiento de la metodología ha sido comprobada mediante resultados simulados. Por último se ha demostrado que, para el sistema en bucle cerrado, el origen es LES.

Palabras clave: Control No-lineal, Funciones de Lyapunov, Linealización por realimentación, Helicópteros, Doble Rotor.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se presenta el diseño de un controlador haciendo uso de funciones de Lyapunov. La metodología de diseño de este controlador puede ser usada para una clase de sistemas subactuados en los que la técnica de *backstepping* no puede ser directamente aplicada, por ser esta clase de sistemas no linealizable por realimentación en algún punto de funcionamiento. A diferencia de [2], en este artículo no se impondrá como condición de partida que el sistema sea controlable en todo el espacio de trabajo, pero se impondrá que se pueda obtener un modelo aproximado del sistema, de tal forma que el sistema pueda ser considerado controlable en todo el espacio de trabajo. El diseño del controlador se hará sobre el sistema que representa el movimiento longitudinal de un helicóptero de laboratorio.

El artículo está estructurado de la siguiente manera: en el apartado 2 se describe el sistema. Seguidamente, en la sección 3 se realizan ciertas consideraciones sobre la controlabilidad del siste-

ma. A continuación, en el apartado 4 se realiza el diseño del controlador y se demuestra la estabilidad del sistema en bucle cerrado. En la sección 5 se presentan resultados simulados y finalmente, en el apartado 6 se muestran las principales conclusiones.

2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El sistema empleado es un equipo electro-mecánico (ver figura 1) impulsado por el movimiento de dos rotores en cuadratura. Este equipo se caracteriza por ser multivariable, no lineal y fuertemente acoplado. Los grados de libertad sobre el cuerpo del sistema son el ángulo de cabeceo y el ángulo de guiñada (elevación y orientación). Las hélices de los motores principal y de cola representan dos grados de libertad adicionales, y la alimentación de estos motores serán las 2 actuaciones existentes. Se trata por tanto de un sistema con 4 grados de libertad y 2 señales de control. Atendiendo a la definición dada en [3], este sistema se considera subactuado por tener menor número de señales de control que grados de libertad. Para este estudio se va sólo a trabajar con el subsistema de elevación, es decir, sólo se va a tener en cuenta el movimiento longitudinal del sistema. Para ello se considerará que el ángulo de guiñada es fijo y que el rotor de cola está parado. De esta forma, los grados de libertad son el ángulo de guiñada y la posición de la hélice principal, siendo la señal de control la alimentación del motor. Por tanto, el subsistema de elevación también es un sistema subactuado.

Las ecuaciones que describen el movimiento longitudinal del equipo son las siguientes:

$$I_\varphi \ddot{\varphi} + GS(\varphi - \varphi_{eq}) + K_\varphi \cdot \dot{\varphi} = L_g |\omega_g| \omega_g \quad (1)$$

$$I_g \dot{\omega}_g = u - (B_g + D_g |\omega_g|) \omega_g \quad (2)$$

donde:



Figura 1: Helicóptero de Laboratorio.

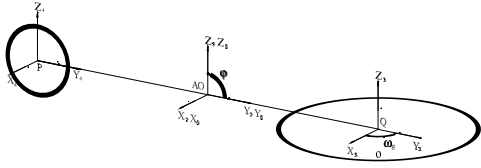


Figura 2: Subsistema de elevación

- φ : Ángulo de cabeceo medido desde el punto de equilibrio estático.
- I_φ : Inercia del sistema respecto al eje de rotación X_0 .
- ω_g : Velocidad Angular del motor principal.
- I_g : Inercia conjunto motor-hélice con respecto al eje de rotación X_3 .
- $L_g|\omega_g|\omega_g$: Par debido a las fuerzas de propulsión aerodinámica.
- $K_\varphi \cdot \dot{\varphi}$: Par de Fricción.
- $G \cdot S(\varphi - \varphi_{eq})$: Par de Gravedad. ($S(\varphi) = \sin(\varphi)$)
- u : Par motor.
- B_g : Constante de fricción viscosa del motor.
- D_g : Constante de resistencia aerodinámica de la hélice.

3. ANÁLISIS DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA

Antes de plantear un sistema de control vamos a analizar la controlabilidad del sistema propuesto. Para ello expresaremos las ecuaciones del sistema en la forma

$$\dot{X} = f(x) + g(x) \cdot u$$

donde se ha definido el vector de estados como:

$$X = \begin{bmatrix} \varphi - \varphi_{eq} \\ \dot{\varphi} \\ \omega_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

resultando

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-GS(x_1) - K_\varphi \cdot x_2 + L_g |x_3| x_3}{I_\varphi} \\ \frac{-(B_g + D_g |x_3|) x_3}{I_g} \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_g} \end{bmatrix} \quad (4)$$

El sistema será controlable si los campos vectoriales $\{g, ad_f(g), ad_f^2(g)\}$ son linealmente independientes, (ver [7]), donde $ad_f(g)$ se define como campo adjunto de g respecto de f y se calcula resolviendo $ad_f(g) = [f, g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g$.

Para simplificar los cálculos se va a suponer que $x_3 > 0$. Teniendo esto en cuenta se obtienen los diferentes campos vectoriales

$$ad_f^0(g) = g$$

$$ad_f(g) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{L_g}{I_g I_\varphi} 2x_3 \\ \frac{1}{I_g^2} (B_g + 2x_3 D_g) \end{bmatrix}$$

y

$$ad_f^2(g) = \begin{bmatrix} \frac{2L_g}{I_g I_\varphi} x_3 \\ -\frac{2K_\varphi L_g}{I_g I_\varphi^2} x_3 - \frac{2L_g D_g}{I_g^2 I_\varphi} x_3^2 \\ -\frac{2D_g}{I_g^3} (B_g + D_g x_3) x_3 + \frac{1}{I_g^3} (B_g + D_g 2x_3)^2 \end{bmatrix}$$

Se observa que los campos vectoriales $\{g, ad_f(g), ad_f^2(g)\}$ son linealmente independientes si y sólo si $x_3 \neq 0$. Esto quiere decir que el sistema es controlable siempre que $x_3 \neq 0$, es decir, que la velocidad del rotor sea distinta de cero.

4. DISEÑO DEL CONTROLADOR

Para el diseño del controlador mediante funciones de Lyapunov, se va a seguir el método de *backstepping*, el cual se puede encontrar en libros como [4],[5] y [6].

Si trabajamos con un sistema *feedback estricto*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \quad (5)$$

$$\dot{\xi} = f_1(x, \xi) + g_1(x, \xi)u \quad (6)$$

la teoría desarrollada hasta ahora hace sólo referencia a sistemas cuya primera ecuación (5) es afín en control. En nuestro caso particular las ecuaciones del sistema vienen dadas por (1) y (2) donde (1) no es afín si se considera ω_g como la señal de control del subsistema.

Para expresar el sistema de forma que la primera ecuación sea afín en control, se define el cambio de variables

$$\xi = L_g|\omega_g|\omega_g$$

donde

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial \omega_g} \dot{\omega}_g = 2L_g|\omega_g|\dot{\omega}_g$$

ξ representa el par aplicado al eje del sistema y es ahora la nueva señal de control.

Aplicando la definición del vector de estados, las ecuaciones del sistema quedan de la siguiente forma:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-GS(x_1) - Kx_2}{I_\varphi} + \frac{1}{I_\varphi} \xi \quad (8)$$

$$\dot{\xi} = f_1(x_3) + g_1(x_3)u \doteq \hat{u} \quad (9)$$

donde

$$f_1(x_3) = \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \frac{-(B_g + D_g|x_3|)x_3}{I_g} \quad (10)$$

$$g_1(x_3) = \frac{1}{I_g} \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \quad (11)$$

Se puede observar que ahora el primer bloque de ecuaciones es afín en control. Sin embargo el cambio de variables ha introducido un término $g_1(x_3)$ que se hace cero cuando $\frac{\partial \xi}{\partial x_3} = 2L_g|x_3| = 0$, lo cual ocurre cuando $x_3 = 0$, es decir, cuando la velocidad del rotor $\omega_g = 0$.

Si se resolviera el problema usando \hat{u} , se tendría una estructura de *backstepping integrador*, la cual finalmente nos llevaría a deshacer el cambio realizado para obtener el valor de u , dado por

$$u = \frac{\hat{u}}{g_1(x_3)} - \frac{f_1(x_3)}{g_1(x_3)} \quad (12)$$

Se observa que esta ley no es válida justamente cuando la velocidad del rotor se hace cero, que coincide con la condición de no controlabilidad del sistema. Por lo tanto esta ley es cuasi-global, en el sentido de que sólo para $x_3 = 0$ no tiene validez. En la práctica, para un valor pequeño de x_3 se daría una señal de control al motor demasiado grande que lo haría saturar.

4.1. BACKSTEPPING APROXIMADO CONSTRUCTIVO

La idea del *Backstepping Aproximado Constructivo* consiste en modificar g_1 , para que la ley esté bien definida en todo el espacio de trabajo. Modificar g_1 implica modificar $\frac{\partial \xi}{\partial x_3}$ y a su vez ξ . El método por tanto consiste en estudiar otra forma de modelar las fuerzas de propulsión del sistema, de tal manera que el sistema sea controlable y que por tanto la nueva g_1 no se haga cero nunca. Esto lo haremos realizando una sobreparametrización del modelo de las fuerzas de propulsión.

Partiendo de $g_1(x_3) = \frac{1}{I_g} \frac{\partial \xi}{\partial x_3}$, se quiere obtener una nueva función $\hat{g}_1(x_3) \neq 0 \forall x_3$. Se prueba con el método más sencillo que consiste en añadir un valor contante ϵ a la función $\frac{\partial \xi}{\partial \omega_g}$. De esta forma se tiene, $\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x_3} = 2L_g|x_3| + \epsilon \neq 0 \forall x_3$. A continuación se calcula el nuevo $\hat{\xi} = L_g|x_3|x_3 + \epsilon x_3$ que a partir de ahora se tomará como nuevo modelo de propulsión.

Si estudiamos la controlabilidad del nuevo sistema obtenemos que para $x_3 = 0$

$$(g, ad_f g, ad_f^2 g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\epsilon}{I_\varphi I_g} \\ 0 & -\frac{\epsilon}{I_\varphi I_g} & -\epsilon \left(\frac{K_\varphi}{I_\varphi^2 I_g} + \frac{B_g}{I_\varphi I_g^2} \right) \\ \frac{1}{I_g} & \frac{B_g}{I_g^2} & \frac{B_g^2}{I_g^3} \end{bmatrix} \quad (13)$$

los vectores son linealmente independientes, siendo el determinante $-\frac{\epsilon^2}{I_\varphi^2 I_g^3} \neq 0$. Por lo tanto, el nuevo modelo de sistema es controlable para cualesquiera valores del vector de estados.

4.2. FUNCIÓN DE LYAPUNOV DEL PRIMER SUBSISTEMA

El primer subsistema viene dado por la ecuación:

$$I_\varphi \ddot{\varphi} + GS(\hat{\varphi}) + K_\varphi \dot{\varphi} = \hat{\xi} \quad (14)$$

Esta ecuación corresponde a la de un péndulo simple que posee un ángulo de equilibrio estático φ_{eq} , donde se ha definido $\hat{\varphi} = \varphi - \varphi_{eq}$. Por simplicidad a la hora de escoger una función de Lyapunov tomaremos la energía asociada al péndulo, la cual viene dada por:

$$W = E_c + E_p = G(1 - C(\hat{\varphi})) + \frac{1}{2} I_\varphi \dot{\varphi}^2 \quad (15)$$

la cual es localmente definida positiva $\forall (\hat{\varphi}, \dot{\varphi}) \neq 0$

Por otro lado,

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \hat{\varphi}} \dot{\hat{\varphi}} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\dot{\varphi}} = GS(\hat{\varphi})\dot{\hat{\varphi}} + I_\varphi \dot{\varphi} \ddot{\varphi}$$

$$\begin{aligned}
&= GS(\hat{\varphi})\dot{\varphi} + \dot{\varphi}(-GS(\hat{\varphi}) - K_\varphi\dot{\varphi} + \hat{\xi}) \\
&= \dot{\varphi}(-K_\varphi\dot{\varphi} + \hat{\xi}) \quad (16)
\end{aligned}$$

Para imponer que $\dot{W} < 0$ basta hacer que $\hat{\xi} < K_\varphi\dot{\varphi}$. Tomando $\hat{\xi} = \bar{K}_\varphi\dot{\varphi}$ con $\bar{K}_\varphi < K_\varphi$ resulta

$$\dot{W} = -[K_\varphi - \bar{K}_\varphi]\dot{\varphi}^2 = -\bar{K}_\varphi\dot{\varphi}^2 < 0$$

Por tanto la dinámica en bucle cerrado resultante vendrá dada por

$$I_\varphi\ddot{\varphi} + GS(\hat{\varphi}) + \bar{K}_\varphi\dot{\varphi} = 0 \quad (17)$$

Se observa que inyectando fricción viscosa se consigue modificar el comportamiento del sistema, haciéndolo menos oscilatorio. Eso implicaría hacer que $\bar{K}_\varphi = K_\varphi - \bar{K}_\varphi$ aumente con lo que $\bar{K}_\varphi < 0$. Definimos una nueva constante positiva tal que $\hat{K}_\varphi = -\bar{K}_\varphi > 0$

4.3. FUNCIÓN DE LYAPUNOV DEL SISTEMA COMPLETO

Para obtener un controlador para el sistema completo, se usará la información obtenida para controlar el primer sistema. La dinámica en bucle cerrado obtenida previamente para el primer sistema, se tomará como dinámica deseada para el sistema completo. De la misma forma se hará con la señal de control obtenida, tomándola como señal de control deseada sobre el primer sistema. De esta forma se tiene:

$$\dot{\hat{\xi}}_{des} = -\hat{K}_\varphi\dot{\varphi} \quad (18)$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_{des} = -\hat{K}_\varphi\ddot{\varphi} \quad (19)$$

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \hat{\xi}_{des} = \hat{\xi} + \hat{K}_\varphi\dot{\varphi} \quad (20)$$

$$\dot{\tilde{\xi}} = \dot{\hat{\xi}} - \dot{\hat{\xi}}_{des} = \hat{u} + \hat{K}_\varphi\ddot{\varphi} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \frac{1}{I_\varphi}(-GS(\hat{\varphi}) - K_\varphi\dot{\varphi} + \hat{\xi}) \\
&= \frac{1}{I_\varphi}(-GS(\hat{\varphi}) - K_\varphi\dot{\varphi} + \tilde{\xi} + \hat{\xi}_{des}) \\
&= \frac{1}{I_\varphi}(-GS(\hat{\varphi}) - K_\varphi\dot{\varphi} + \tilde{\xi} - \hat{K}_\varphi\dot{\varphi}) \\
&= \frac{1}{I_\varphi}(-GS(\hat{\varphi}) - \bar{K}_\varphi\dot{\varphi} + \tilde{\xi}) \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{\xi}} = \hat{u} + \frac{\hat{K}}{I_\varphi}(-GS(\hat{\varphi}) - \bar{K}_\varphi\dot{\varphi} + \tilde{\xi}) \quad (23)$$

A continuación, se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$\begin{aligned}
V &= W + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^2 \\
&= G(1 - C(\hat{\varphi})) + \frac{1}{2}I_\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^2 \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{W} + \tilde{\xi}\dot{\tilde{\xi}} \\
&= \frac{\partial W}{\partial \hat{\varphi}}\dot{\varphi} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} + \tilde{\xi}\dot{\tilde{\xi}} \\
&= GS(\hat{\varphi})\dot{\varphi} + I_\varphi\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \tilde{\xi}\dot{\tilde{\xi}} \\
&= GS(\hat{\varphi})\dot{\varphi} + \dot{\varphi}(-GS(\hat{\varphi}) - \bar{K}_\varphi\dot{\varphi} + \tilde{\xi}) + \tilde{\xi}\dot{\tilde{\xi}} \\
&= \dot{\varphi}(-\bar{K}_\varphi\dot{\varphi} + \tilde{\xi}) + \tilde{\xi}\dot{\tilde{\xi}} \\
&= -\bar{K}_\varphi\dot{\varphi}^2 + \tilde{\xi}(\dot{\varphi} + \dot{\tilde{\xi}}) \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\dot{V} = -\bar{K}_\varphi\dot{\varphi}^2 + \tilde{\xi}\left(\dot{\varphi} + \hat{u} + \frac{\hat{K}}{I_\varphi}(-GS(\hat{\varphi}) - \bar{K}_\varphi\dot{\varphi} + \tilde{\xi})\right) \quad (26)$$

La señal de control se obtendría haciendo $\dot{V} < 0$. Para ello el paréntesis del segundo término se podría igualar a $-p\tilde{\xi}$, quedando

$$\dot{V} = -\bar{K}_\varphi\dot{\varphi}^2 - p\tilde{\xi}^2 \quad (27)$$

$$-p\tilde{\xi} = \dot{\varphi} + \hat{u} + \frac{\hat{K}}{I_\varphi}(-GS(\hat{\varphi}) - \bar{K}_\varphi\dot{\varphi} + \tilde{\xi}) \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= \frac{\hat{K}}{I_\varphi}(GS(\hat{\varphi}) + \bar{K}_\varphi\dot{\varphi}) - \frac{\hat{K}}{I_\varphi}\tilde{\xi} - \dot{\varphi} - p\tilde{\xi} \\
&= \frac{\hat{K}}{I_\varphi}GS(\hat{\varphi}) + \left(\frac{\hat{K}}{I_\varphi}\bar{K}_\varphi - 1\right)\dot{\varphi} - \left(\frac{\hat{K}}{I_\varphi} + p\right)\tilde{\xi} \\
&= \frac{\hat{K}}{I_\varphi}GS(\hat{\varphi}) + \left(\frac{\hat{K}}{I_\varphi}\bar{K}_\varphi - 1\right)\dot{\varphi} - \left(\frac{\hat{K}}{I_\varphi} + p\right)(\hat{\xi} + \hat{K}_\varphi\dot{\varphi}) \\
&= \frac{\hat{K}}{I_\varphi}GS(\hat{\varphi}) + \left(\frac{\hat{K}}{I_\varphi}K_\varphi - 1 - p\hat{K}_\varphi\right)\dot{\varphi} - \left(\frac{\hat{K}}{I_\varphi} + p\right)\hat{\xi} \\
&= k_1S(\hat{\varphi}) - k_2\dot{\varphi} - k_3\hat{\xi} \quad (29)
\end{aligned}$$

donde aplicando la aproximación constructiva del modelo de propulsión se tiene que

$$\hat{\xi} = L_g|x_3|x_3 + \epsilon x_3 \quad (30)$$

Por otro lado, la señal de control que realmente se aplica al motor viene dada por:

$$u = \frac{\hat{u}}{g_1(x_3)} - \frac{f_1(x_3)}{g_1(x_3)} \quad (31)$$

donde

$$\frac{f_1(x_3)}{g_1(x_3)} = -(B_g + D_g|x_3|)x_3 \quad (32)$$

$$g_1(x_3) = \frac{1}{I_g} \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x_3} = 2L_g|x_3| + \epsilon \quad (34)$$

por tanto

$$u = \frac{\hat{u}}{\frac{2L_g|x_3|+\epsilon}{I_g}} + (B_g + D_g|x_3|)x_3 \quad (35)$$

Se observa que esta ley está bien definida para todos los valores de la velocidad del rotor $x_3 = \omega_g$

4.4. ESTABILIDAD DEL SISTEMA EN BUCLE CERRADO

Si hacemos una recopilación de las ecuaciones que forman el controlador diseñado obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= L_g|x_3|x_3 + \epsilon x_3 \\ \hat{u} &= k_1 S(\hat{\varphi}) - k_2 \dot{\varphi} - k_3 \hat{\xi} \\ u &= \frac{\hat{u}}{\frac{2L_g|x_3|+\epsilon}{I_g}} + (B_g + D_g|x_3|)x_3 \end{aligned}$$

sustituyendo en u se obtiene

$$u = \frac{k_1 S(\hat{\varphi}) - k_2 \dot{\varphi} - k_3 (L_g|x_3|x_3 + \epsilon x_3)}{\frac{2L_g|x_3|+\epsilon}{I_g}} + (B_g + D_g|x_3|)x_3 \quad (36)$$

Por otro lado las ecuaciones del sistema venían dadas por

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(x) + g(x) \cdot u \\ \dot{X} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-GS(x_1) - K_\varphi \cdot x_2 + \hat{L}_g|x_3|x_3}{I_\varphi} \\ \frac{-(B_g + D_g|x_3|)x_3}{I_g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_g} \end{bmatrix} \cdot u \end{aligned}$$

y sustituyendo el valor de u obtenemos las ecuaciones del sistema en bucle cerrado:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-GS(x_1) - K_\varphi \cdot x_2 + \hat{L}_g|x_3|x_3}{I_\varphi} \\ \frac{k_1 S(x_1) - k_2 x_2 - k_3 x_3 (L_g|x_3| + \epsilon)}{2L_g|x_3| + \epsilon} \end{bmatrix}$$

Método de Linealización de Lyapunov

En primer lugar vamos a aplicar el método de linealización de Lyapunov para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio $X = (0, 0, 0)$. Si definimos la matriz A como el Jacobiano de f respecto de X en X=0, entonces $\dot{X} = AX$ es la linealización del sistema no lineal alrededor del punto de equilibrio $X = (0, 0, 0)$.

Calculando el Jacobiano del sistema se obtiene:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-G}{I_\varphi} C(x_1) & \frac{-K_\varphi}{I_\varphi} & \frac{2L_g}{I_\varphi} |x_3| \\ \frac{K_1 C(x_1)}{2L_g|x_3|+\epsilon} & \frac{-K_2}{2L_g|x_3|+\epsilon} & K_3 \left(-1 + \frac{2L_g|x_3|(L_g|x_3|+\epsilon)}{(2L_g|x_3|+\epsilon)^2} \right) \end{bmatrix}$$

sustituyendo para $X = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-G}{I_\varphi} & \frac{-K_\varphi}{I_\varphi} & 0 \\ \frac{K_1}{\epsilon} & \frac{-K_2}{\epsilon} & -K_3 \end{bmatrix}$$

Calculando los autovalores de A,

$$|SI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ \frac{G}{I_\varphi} & s + \frac{K_\varphi}{I_\varphi} & 0 \\ \frac{-K_1}{\epsilon} & \frac{K_2}{\epsilon} & s + K_3 \end{vmatrix} = 0$$

se obtiene que

$$|SI - A| = (s + K_3) \left(s \cdot \left(s + \frac{K_\varphi}{I_\varphi} \right) + \frac{G}{I_\varphi} \right) = 0 \quad (37)$$

$$|SI - A| = (s + K_3) \left(s^2 + s \frac{K_\varphi}{I_\varphi} + \frac{G}{I_\varphi} \right) = 0 \quad (38)$$

y aplicando el criterio de Routh-Hurwitz, sabiendo que todas las constantes son positivas, se observa que A tiene todos sus autovalores en el semiplano complejo izquierdo. Como A es Hurwitz, se puede afirmar que el punto de equilibrio es asintóticamente y exponencialmente estable (**LES**) para el sistema no lineal completo.

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

El controlador viene dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= L_g|x_3|x_3 + \epsilon x_3 \\ \hat{u} &= k_1 S(\hat{\varphi}) - k_2 \dot{\varphi} - k_3 \hat{\xi} \\ u &= \frac{\hat{u}}{\frac{2L_g|x_3|+\epsilon}{I_g}} + (B_g + D_g|x_3|)x_3 \end{aligned}$$

donde el valor ϵ es desconocido y ha de ser calculado de forma experimental representando los pares de propulsión $\hat{\xi}$ frente a la velocidad del rotor $x_3 = \omega_g$. En la figura 3 se muestra un ajuste por mínimos cuadrados de los datos experimentales usando dos modelos, uno de ellos sobreparametrizado. Se observa que cualitativamente las curvas son muy parecidas representando bien los

resultados experimentales, sin embargo la sobreparametrizada nos va a permitir resolver el problema de control sin que la señal de control vaya a infinito para velocidad cero en el rotor.

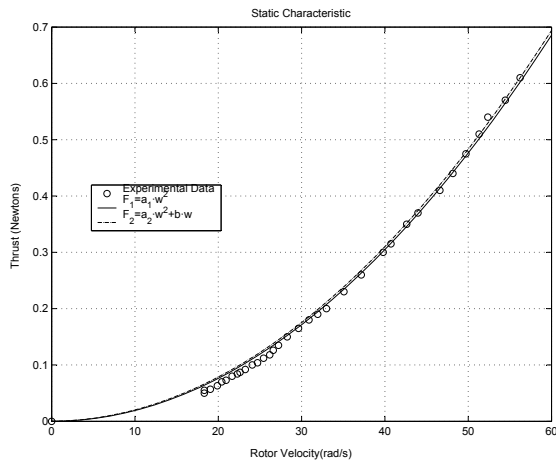


Figura 3: Característica estática de propulsión

En la figura 4 se muestra la respuesta temporal del controlador para el problema de regulación.

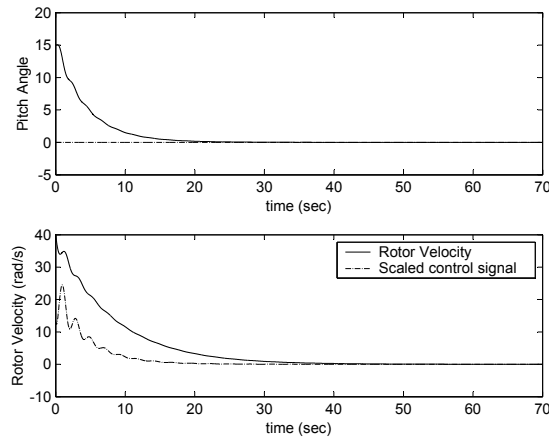


Figura 4: Respuesta temporal del sistema

De igual modo en la figura 5 se muestra la evolución de los valores del vector de estados, que en el problema de regulación básico tiende al vector $[x_1, x_2, x_3] = [0, 0, 0]$.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha aplicado la idea de diseño constructivo de controladores tal y como se entiende en [6]. En concreto se ha aplicado para el diseño de un controlador usando la técnica de *backstepping*. Aplicando esta metodología se ha conseguido diseñar un controlador que da una señal de control sin picos y que toma valores finitos cuando la velocidad del rotor tiende a cero, tal y como se preveía en un principio. La ley de control ha sido

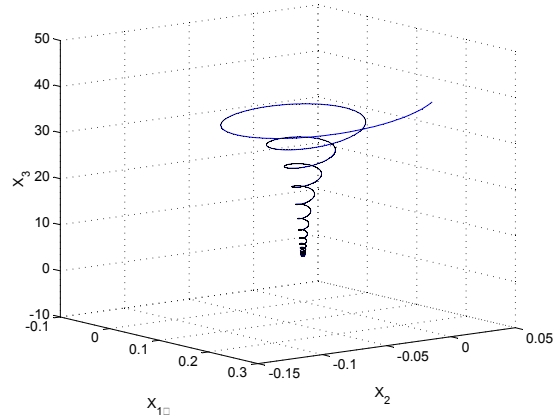


Figura 5: diagrama de estados

probada bajo simulación considerando un modelo cuadrático de impulsión, y los resultados obtenidos han sido satisfactorios. Además se ha demostrado que para el sistema controlado el origen es LES.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado con fondos pertenecientes a los proyectos MCyT-FEDER DPI2003-00429 y DPI2001-2424-C02-01

Referencias

- [1] Spong, M.W. and Vidyasagar, M., (1989). "Robot Dynamics and Control". John Wiley & Sons. New York.
- [2] Lai, M.C., Chien, C.C., Cheng, C.Y., Xu, Z. and Zhang, Y., (1994). "Nonlinear tracking control via approximate backstepping". Proc. American Control Conference, vol.2, pp.1339-1343.
- [3] Fantoni, I. and Lozano, R., (2002). "Nonlinear Control for Underactuated Mechanical Systems". Springer-Verlag, London. ISBN:1852334231
- [4] Khalil, Hassan K., (1996). "Nonlinear Systems". Prentice Hall, ISBN: 0-13-067389-7
- [5] Krstic, M., Kanellakopoulos, L. and Kokotovic, P. (1995). "Nonlinear and Adaptive Control Design". John Wiley and sons, New York. ISBN: 10158-0012
- [6] Sepulchre, R., Jankovic, M. and Kokotovic, P.V. (1997). "Constructive Nonlinear Control". Springer, London. ISBN:3540761276
- [7] Su, R., (1981). "On the Linear Equivalents of Nonlinear Systems". Systems and Control Letter, Vol.2.