

Reduccion de Sistema Lineal por Aproximacion de Energia Impulsional

Dr. M. H. Alanbari (*) y Dr. Agustín J. Avello(**)

(*) Dpto de Organización Industriales de la Univesidad Europea de Madrid, VILLAVICIOSA DE Odón, 28670 Madrid.E-mail: alanbari@oi.ind.uem.es

(**) Dpto. de Automática Ingeniería Electrónica e Informática Industrial (DISAM) de la Universidad Politécnica de Madrid, E.T.S. Ingenieros Industriales, José Gutiérrez Abascal, 2 - 28006 Madrid. E-mail: ajimenez@etsii.upm.es

Resumen

Se ha desarrollado el nuevo método de reducción de la energía impulsional del sistema, basado en retener en el modelo reducido las r parejas de parámetros (alfa y beta) que contribuyen en mayor medida a la energía de la respuesta impulsional. La ventaja fundamental de este método, aparte de su sencillez, es que todas las aproximaciones del modelo de la planta son estables.

1 INTRODUCCIÓN :

Debido a los siguientes inconvenientes:

- 1- Complejidad en el problema del diseño.
- 2- Complejidad del algoritmo de diseño.
- 3- Necesidad de más cálculo y memoria para aplicaciones en tiempo real.
- 4- Difícil ejecución en la práctica.
- 5- Menor fiabilidad y mayor mantenimiento.

se desea conseguir un modelo y un controlador robusto de orden reducido, de forma que ambos se correspondan con mínimos errores al modelo de la planta y al controlador original respectivamente. Asimismo también es importante saber las cotas sobre el error en la aproximación de un sistema por otro de menor orden. Durante los últimos veinte años se han hecho mucha investigaciones en reducciones de los modelos y controladores. Estas investigaciones se pueden dividir en dos partes :

- 1- Las que tienen valores propios y variables de estado importantes[4-23].
- 2- Las que determinan un modelo reducido tal que se produce una aproximación óptima del sistema original,sin la restricción de tener que hallar los valores propios o las variables de estado[24-37].

Hutton y Friedland [1] utilizaron en sus trabajos la idea de energía de respuesta impulsional para seleccionar el orden del modelo reducido. Las mismas ideas han sido utilizadas con éxito por T.N Lucas y Davidson [2] y G.D.Lastman[3].

Hutton y Friedland usaron la técnica llamada tablas de alfa y beta, pero Lucas y Davidson usaron la técnica de tablas de N y D que eran más cómodas para el cálculo del modelo reducido de la energía impulsional.

El desarrollo del método de reducción de la energía impulsional consiste en que las r parejas de parámetros (alfa y bata) de las tablas D y N que contribuyen en mayor medida a la energía impulsional, son retenidas en el modelo reducido gr(s).

La aproximación de Routh[1] se basaba en retener los r primeros parámetros de alfa y beta.

2 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DESARROLLADO:

2.1 Reducción de modelos monovariantes

2.1.1 Modelo de fase mínima

1- Se considera un sistema estable monovariante, de fase mínima y de orden n, con función de transferencia es g(s) que viene dado por:

$$Y(s) = g(s) * u(s) \tag{1}$$

donde

$$g(s) = \frac{b_{11} + b_{12}s + \dots + b_{1n-1}s^{n-2} + b_{1n}s^{n-1}}{a_{11} + a_{12}s + \dots + a_{1n}s^{n-1} + a_{1n+1}s^n}$$

Y(s) es la única salida, u(s) es la única entrada, g(s) es la función de transferencia y los b_{li} (i = 1,2,...n) y a_{li} (i = 1,2,...n+1) son constantes escalares.

2- La tabla D de g(s) tiene la siguiente forma [192]:

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \dots a_{1n+1}$$

$$\alpha_1 = \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

$$a_{12} \quad 0 \quad a_{14} \quad 0 \dots$$

$$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad a_{24} \dots a_{2n}$$

$$\alpha_2 = \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

$$a_{22} \quad 0 \quad a_{24} \quad 0 \dots$$

de forma general, se puede escribir el valor de alfa como sigue:

$$a_{n1} \quad a_{n2} \quad \dots$$

$$\alpha_n = \frac{a_{n1}}{a_{n2}}$$

$$a_{n2} \quad 0 \quad \dots$$

(2)

donde

$$a_{ij} = a_{i-1,j+1} \quad \text{si } (j \text{ es impar}) \quad i = (2,3,\dots,n)$$

$$a_{ij} = a_{i-1,j+1} - \alpha_{i-1} * a_{i-1,j+2} \quad \text{si } (j \text{ es par})$$

3- La tabla N de g(s) tiene la siguiente forma:

$$b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13} \quad b_{14} \dots b_{1n}$$

$$\beta_1 = \frac{b_{11}}{a_{12}}$$

$$a_{12} \quad 0 \quad a_{14} \quad 0 \quad \dots$$

$$b_{21} \quad b_{22} \quad b_{23} \quad b_{24} \dots b_{2n-1}$$

$$\beta_2 = \frac{b_{21}}{a_{22}}$$

$$a_{22} \quad 0 \quad a_{24} \quad 0 \dots$$

de forma general, se puede escribir el valor de beta como sigue:

$$b_{n1} \quad b_{n2} \quad \dots$$

$$\beta_n = \frac{b_{n1}}{a_{n2}}$$

$$a_{n2} \quad 0 \quad \dots$$

(3)

donde

$$b_{ij} = b_{i-1,j+1} \quad \text{si } (j \text{ es impar}) \quad i = (2,3,\dots,n)$$

$$b_{ij} = b_{i-1,j+1} - \beta_{i-1} a_{i-1,j+2} \quad \text{si } (j \text{ es par})$$

4- La energía de respuesta impulsional del sistema de la ecuación (4-1) es [98]:

$$EI = 0.5 * \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} = 0.5 * \sum_{i=1}^n e_i \quad (4)$$

Un vez se ha calculado la energía impulsional a cada término, el desarrollo del método de reducción de la energía impulsional puede verse a continuación:

5- De los valores calculados de la energía impulsional EI/término, se comparan los valores de e_i para ($i=1,2,\dots,n$) y eligiendo las r parejas de parámetros (alfa y beta) que contribuyen más en EI, y se les retienen en el modelo reducido $gr(s)$ de la forma siguiente:

Se supone que $a_i(s)$ y $b_i(s)$ denotan el denominador y el numerador respectivamente del modelo reducido, de los parámetros que contribuyen más en EI. Los valores de $a_i(s)$ y $b_i(s)$ son:

$$\begin{aligned} a_1(s) &= \alpha_1 s + 1 && \text{para } r = 1 \\ b_1(s) &= \beta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(s) &= \alpha_1 \alpha_2 s^2 + \alpha_2 s + 1 && \text{para } r = 2 \\ b_2(s) &= \alpha_2 b_1 s + \beta_2 \end{aligned}$$

...
...
...

y de forma más general:

$$\begin{aligned} a_r(s) &= \alpha_r s a_{r-1}(s) + a_{r-2}(s) \\ b_r(s) &= \alpha_r s b_{r-1}(s) + b_{r-2}(s) + \beta_r \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{-1}(s) &= 0, & b_{-1}(s) &= 0 \\ a_0(s) &= 1, & b_0(s) &= 0 \end{aligned}$$

y

$$r = \text{orden del modelo reducido}$$

6- Si los coeficientes c_1, c_2, \dots, c_r y $d_0, d_1, d_2, \dots, d_r$ (de orden creciente) son componentes de los polinomios $b_r(s)$ y $a_r(s)$ respectivamente, entonces la función de transferencia del modelo reducido de orden r es:

$$gr(s) = \frac{c_r * s^{r-1} + \dots + c_2 * s^1 + c_1}{d_r * s^r + \dots + d_1 * s^1 + d_0} \quad (6)$$

donde los coeficientes del numerador y el denominador son los mismos de $b_r(s)$ y $a_r(s)$, pero de orden decreciente.

7- Si se aplica un escalón en bucle abierto, el modelo reducido tiene que incluir el primer término (\square_1, \square_1) por causa de que hay una relación entre el primer término y las características del modelo en régimen permanente de la siguiente forma:

Se aplica el teorema del valor final al modelo de la ecuaciones (1) y se consigue:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s * Y(s) * 1/s = b_{11}/a_{11} \quad (7)$$

donde Y(t) es la respuesta temporal de la función de transferencia de la ecuación (1).

A partir de las ecuaciones ((2) y (3)) se obtienen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_{11}}{b_{12}}, \text{ entonces } a_{11} = \alpha_1 * b_{12} \\ \beta_1 &= \frac{b_{11}}{a_{12}}, \text{ entonces } b_{11} = \beta_1 * a_{12} \end{aligned} \quad (8)$$

sustituyendo los valores de a_{11} , b_{11} de la ecuación (8) en la ecuación (7) se consigue:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \quad (9)$$

Se puede ver claramente de la ecuación (9), que las características del modelo en régimen permanente depende de los valores de α_1 y β_1 (el primer término).

8- Para conseguir un modelo reducido más próximo al modelo original, se ajusta el modelo reducido del la ecuación (6) por un parámetro de escala $\rho > 0$ de la forma siguiente:

Se considera que cada par de parámetros (α_i, β_i) que se retienen en el modelo reducido es multiplicado por un parámetro de escala $\rho > 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i &= \rho * \bar{\alpha}_i \\ (i &= 1, 2, \dots, r) \\ \hat{\beta}_i &= \rho * \bar{\beta}_i \end{aligned} \quad (10)$$

donde $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i)$ son los pares de parámetros que se retienen en el modelo reducido.

Se ve que los nuevos parámetros de alfa del modelo reducido se mantienen positivos, no habiendo pues cambio en la estabilidad.

Para ver el efecto de ρ sobre el modelo reducido se considera, por simplicidad, que el orden del modelo reducido es 2, entonces los nuevos parámetros de alfa y beta del modelo reducido son:

$$\hat{\alpha}_1 = \rho * \bar{\alpha}_1 \text{ y } \hat{\alpha}_2 = \rho * \bar{\alpha}_2 \quad (11)$$

$$\hat{\beta}_1 = \rho * \bar{\beta}_1 \text{ y } \hat{\beta}_2 = \rho * \bar{\beta}_2$$

donde $(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1)$ y $(\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2)$ son los parámetros que más contribuyen en EI y se les retienen en el modelo reducido.

Sustituyendo los nuevos valores de alfa y beta de la ecuación (11) en la ecuación (5) se consigue:

$$\begin{aligned} a_2(s) &= \rho^2 * \bar{\alpha}_1 * \bar{\alpha}_2 s^2 + \rho * \bar{\alpha}_2 s + 1 \\ b_2(s) &= \rho^2 * \bar{\alpha}_2 * \bar{\beta}_1 s + \rho * \bar{\beta}_2 \end{aligned} \quad (12)$$

Según la ecuación (6), la función de transferencia del modelo reducido modificado grm(s) (orden 2) será:

$$grm(s) = \frac{\bar{\beta}_2 * (s/\rho) + \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1}{(s/\rho)^2 + \bar{\alpha}_2 * (s/\rho) + \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2} \quad (13)$$

Ecuación (13) de una forma general es:

$$gr(s) = gmr(s/\rho) \quad (14)$$

es decir, que la función de transferencia del modelo reducido modificado es igual a la función de transferencia del modelo reducido con la sustitución de (s/ρ) en el lugar de s.

Se puede ver el efecto de sustituir cada s con (s/ρ) en el dominio del tiempo a partir de la teoría de la transformada de Laplace de la forma $grm(t) = \rho^{-1} grm(s/\rho)$. La forma final de grm(t) será:

$$grm(t) = \rho * gr(\rho * t) \quad (15)$$

según la ecuación (15), se escala también el tiempo.

9- El objetivo de usar ρ es reducir la diferencia entre la respuesta de la energía impulsional del modelo original y el modelo reducido. Se puede definir el valor de ρ de la siguiente forma:

Si EI da la energía impulsional del modelo original,

$$EI = 0.5 * \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} = 0.5 * \sum_{i=1}^n e_i \quad (16)$$

la energía impulsional del modelo reducido antes de escalarlo será

$$\overline{EI}r = 0.5 * \sum_{i=1}^r \frac{\overline{\beta}_i^2}{\overline{\alpha}_i} = 0.5 * \sum_{i=1}^r \overline{e}_i \quad (17)$$

A partir de la ecuación (11), sustituyendo los valores de $\overline{\alpha}_i$ y $\overline{\beta}_i$ en la ecuación (17) se consigue:

$$\begin{aligned} \hat{EI}r &= 0.5 * \sum_{i=1}^r \frac{\hat{\beta}_i^2}{\hat{\alpha}_i} = \rho * (0.5 * \sum_{i=1}^r \frac{\overline{\beta}_i^2}{\overline{\alpha}_i}) \\ &= \rho * \overline{EI}r \end{aligned} \quad (18)$$

donde $\hat{EI}r$ es la energía impulsional del modelo reducido modificado después de escalarlo.

Como se ha mencionado antes, el objetivo es igualar la energía impulsional en el modelo original EI con la energía impulsional del modelo reducido modificado $\hat{EI}r$ en la forma siguiente:

$$EI = \hat{EI}r = \rho * \overline{EI}r \quad (19)$$

entonces el valor final de ρ será:

$$\rho = \frac{EI (original)}{\overline{EI}r (reducido)} \quad (20)$$

Es decir, que el valor de ρ es el resultado de la división entre la energía impulsional del modelo original y la energía impulsional del modelo reducido antes de escalarlo.

10- En caso de que no haya mucha diferencia entre los valores de e_i , habría dificultad en elegir los parámetros del modelo reducido. Por eso una de las restricciones de este método es que los mejores resultados se consiguen cuando los valores elegidos para e_i o su participación en la energía impulsional total son del mismo orden de magnitud y mayores que los demás.

11- Los parámetros (\square_i, \square_i) , $(i=1,2,\dots,n)$ dan las características del comportamiento del modelo desde baja frecuencia hasta alta frecuencia, según se aumenta el índice i . Por eso, para la respuesta de un escalón donde las características de baja frecuencia son normalmente el factor dominante en la respuesta total como se ha visto antes en el punto 7, es razonable que alguna medida de importancia tiene que relacionar al (\square_i, \square_i) con los valores bajos de i . Se puede hacer esto con parámetros de energía ponderados. Por medio de experimentos sobre estos casos, se ha desarrollado la formula (21), en la que se multiplican los valores de e_i (en la ecuación (16)) por el factor de ponderación, como sigue:

$$\text{Factor de ponderaci } n = \Psi_i = (n - i + 1) * e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

donde n es igual al orden del modelo original, y luego se elige los r órdenes de (e_i) que contribuyan más en el factor de ponderación (Ψ_i) y reteniéndolos en el modelo reducido.

Se puede ver en el apéndice D, el efecto de calcular el factor de ponderación Ψ en la respuesta de un escalón

Para calcular el error [69] entre la función de transferencia real y la reducida, se utilizará el ISE (error cuadrático integral). Aplicado a la respuesta impulsional, y dividiendo por la integral cuadrática de la respuesta del original.

$$\mathcal{E} = \frac{\int_{t=0}^{t=\infty} (g(t) - grm(t))^2 dt}{\int_{t=0}^{t=\infty} (g(t))^2 dt} \quad (22)$$

Si

$g(s)$ es la función de transferencia del modelo original,

$grm(s)$ es la función de transferencia del modelo aproximado.

entonces

$g(t)$ es la respuesta impulsional del modelo original,

$grm(t)$ es la respuesta impulsional del modelo aproximado.

Este criterio, se aplica al modelo multivariables como sigue:

$$\mathcal{E}_{i,j} = \frac{\int_{t=0}^{\infty} (g_{i,j}(t) - gmr(t)_{i,j})^2 dt}{\sum_{j=1}^n \int_{t=0}^{\infty} (g(t)_{i,j})^2 dt} \quad (23)$$

siendo i el índice de la salida Y (vector-p), j el de la entrada (vector-q).

2.1.2 Modelo de fase no mínima

Para aplicar el método de la sección 2.1.1 al modelo de fase no mínima, se aíslan los ceros en el semiplano derecho por el teorema de Koenig [178] y su generalización, de manera que se calculan los modos inestables de la siguiente forma:

Dado el numerador N(s) de g(s), se construye la siguiente transformación:

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (24)$$

para conseguir $N(z)$. Los ceros inestables de $N(z)$ se sitúan fuera del círculo unidad en el plano- z . Desarrollando $N(z)$ en la forma siguiente:

$$N(z) = N_0 + N_1 z^{-1} + N_2 z^{-2} + \dots \quad (25)$$

A continuación se aplica los teoremas 1 y 2 de Koenig a la ecuación (25) con lo que se obtienen los ceros de $N(z)$ que están más distanciados del centro y que, en este caso, son las raíces fuera del círculo unidad. Después de calcular y aislar los ceros en el semiplano derecho se aplica luego la técnica de reducción al modelo sin ceros en el semiplano derecho, y por fin se añade al modelo reducido los ceros en el semiplano derecho para conseguir un modelo reducido final, bajo la condición de que el orden del denominador del modelo reducido final sea igual o mayor al orden del numerador.

2.1.3 Modelo inestable

Se puede dividir el modelo inestable en dos submodelos: inestable y estable [136,163,173]; se aplica el método de la sección 2.1 al modelo estable, y luego se añade al sistema reducido del modelo estable, la parte inestable del modelo para conseguir un modelo reducido final bajo la misma condición de 2.1.2. Es decir, si el modelo original $G(s)=G_e(s)+G_i(s)$, entonces el modelo reducido será $G_r(s)=G_{er}+G_i(s)$, donde $G_e(s)$ y $G_i(s)$ son las partes del modelo original estable e inestable respectivamente y G_{er} es la parte estable reducido del modelo original. La razón por la cual no se reduce separadamente la parte inestable se debe a consideraciones de estabilidad robusto. Para evaluar la estabilidad robusta de una familia de modelos bajo incertidumbre, se puede plantear condiciones necesarias y suficientes tomando como premisa que el número de polos inestables de la planta permanece constante. Es por ello que en la resolución del orden del modelo, se retienen los mismos polos inestables. El método de dividir el modelo inestable de la planta depende del esquema de descomposición de las rutinas BLKSCH de Schur[173]. Estas rutinas dan la matriz V tal que:

$$A_G = V A_G V^T = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (26)$$

A partir de esta forma ordenada de Schur se puede conseguir la parte estable \hat{A}_{11} y la parte inestable \hat{A}_{22} . Finalmente, resolviendo la ecuación matricial para X

$$\hat{A}_{11} X - X \hat{A}_{22} + \hat{A}_{12} = 0 \quad (27)$$

se obtienen las proyecciones del espacio de estados de las partes del modelo original estable e inestable:

$$[G_e(s)] = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[G_i(s)] = \begin{bmatrix} \hat{A}_{22} & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_2 & D \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} V B_G \quad (29)$$

$$[\hat{C}_1 \hat{C}_2] = C_G V^T \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

2.2 Reducción de modelos multivariables

Se considera un sistema multivariable de orden n, su función de transferencia es G(s), que viene dado por:

$$Y(s) = G(s) * U(s) \quad (30)$$

donde

$$G(s) = \frac{B_{11} + B_{12}s^1 + \dots + B_{1n-1}s^{n-2} + B_{1n}s^{n-1}}{a_{11} + a_{12}s^1 + \dots + a_{1n}s^{n-1} + a_{1n+1}s^n} \quad (31)$$

donde

Y(s) la salida (vector-p)
 U(s) la entrada (vector-q)
 G(s) matriz de la función de transferencia (p x q)

Se puede aplicar esta técnica de reducción al sistema multivariable como sigue:

- 1- Se aplica el método de reducción que se ha mencionado anteriormente a todos los términos de la matriz de la función de transferencia G(s), uno por uno.
- 2- Se calcula el denominador del modelo reducido solo una vez, ya que es el mismo en todos los términos.
- 3- Se calcula el valor del factor de ponderación ρ de la siguiente forma:

$$\rho_m = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{p+q}}{p + q} \quad (32)$$

donde

- ρ_1 = El valor del factor ρ del término uno.
- ρ_2 = El valor del factor ρ del término dos.
-

.....

α_{p+q} = El valor del factor α del término (p+q).

y

α_m = El valor del factor α del modelo multivariable.

4- La principal condición al aplicar esta técnica al sistema multivariable es que los parámetros que contribuyen más en EI y que se retienen en el modelo reducido modificado $Gr_m(s)$, tienen que ser iguales en sus posiciones en los términos de $G(s)$.

5- En el caso de que las parejas de parámetros que contribuyen más en EI y que se retienen en el modelo reducido, no son iguales en sus posiciones, y entonces no se calcula el modelo reducido modificado, sino que obtiene el modelo reducido $Gr(s)$ de la misma manera que se ha mencionado anteriormente, de forma que cada término en la matriz de la función de transferencia reducida tendrá un numerador y un denominador distinto y reducido.

3 EJEMPLO

Se considera el siguiente sistema

$$g(s) = \frac{2 + 6s + 8s^2}{2 + 5s + 4s^2 + s^3} \quad (33)$$

●- Las tablas de D y N son en la tabla (1)

\square_i	D-tabla	$e_i = \frac{\beta^{2i}}{\alpha_i}$	\square_i	N-tabla
$\square_1=0.400$	2 5 4 1 5 0 1	$e_1=0.4$	$\square_1=0.400$	2 6 8 5 0 1
$\square_2=1.389$	5 3.6 1 3.6 0	$e_2=2$	$\square_2=1.667$	6 7.6 3.6 0
$\square_3=3.600$	3.6 1 1	$e_3=16.044$	$\square_3=7.600$	7.6 1

Tabla (1): Los valores de las tablas D y N

●- La tabla (2) muestra la distribución de energía impulsional del modelo de la ecuación (33), además del factor de ponderación.

i	e_i	EI/término	EI-total	fracción de energía %	factor de pond. \square_i
1	0.4	0.2	9.22222	2.169	1.2
2	2	1	9.22222	10.843	4
3	16.04444	8.02222	9.22222	86.988	16.04444

Tabla(2): La distribución de la energía impulsional

●- Se indica en la tabla (2) que la participación del término número (3) en el porcentaje de la energía impulsional total es más significativa que la del término (2), y el último término es más significativo que el término número (1). De las tablas (1) y (2), (\square_2, \square_2) y (\square_3, \square_3) son los parámetros más significativos y que son los que se están reteniendo en el modelo de segundo orden. A partir de la ecuación (6), se puede obtener el numerador y el denominador del modelo reducido como se indica en la siguiente ecuación:

$$gr(s)(2,3) = \frac{7.6s + 6}{s^2 + 3.6s + 5} \quad (34)$$

●- A continuación se hace una comparación entre este método y el método de Routh. La reducción de Routh basada en la retención de las parejas (\square_1, \square_1) y (\square_2, \square_2) en el modelo reducido. El modelo reducido de Routh será en la siguiente forma:

$$gr(s) = \frac{6s + 2}{3.6s^2 + 5s + 2} \quad (35)$$

●- Se aplica un impulso en bucle abierto al modelo de la ecuación (36) (con términos 1 y 3) además de los modelos de las ecuaciones ((33) → (35)), y se consigue la figura (1). Debido a lo que se mencionó antes, el modelo reducido $gr(s)(2,3)$ (con términos 2 y 3) produce una aproximación más cercana al modelo original que los demás.

$$gr(s)(1,3) = \frac{7.6s + 1.44}{s^2 + 3.6s + 1.44} \quad (36)$$

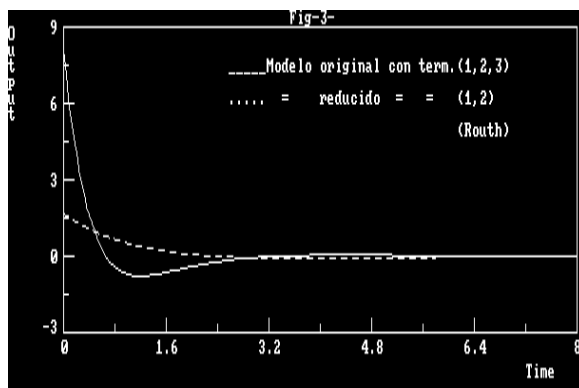
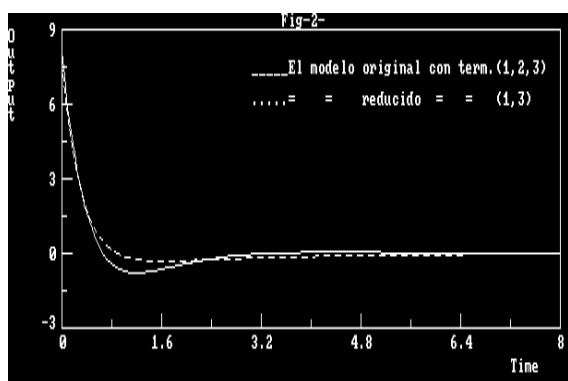
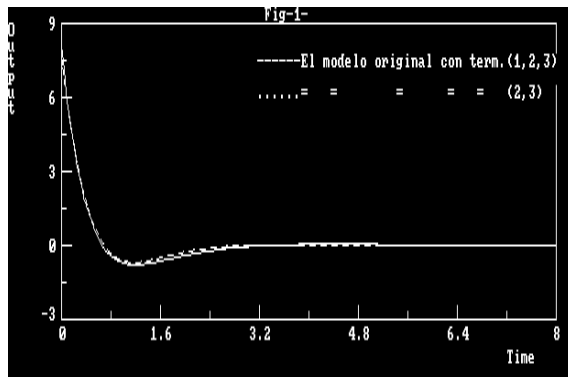


Figura (1): Un impulso en bucle abierto

- Se aplica un escalón en bucle abierto de los modelos reducidos de las ecuaciones ((4-33) \rightarrow (4-36)), y se obtiene la figura (4-4).

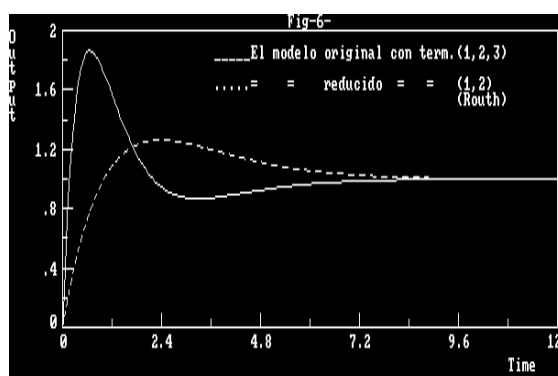
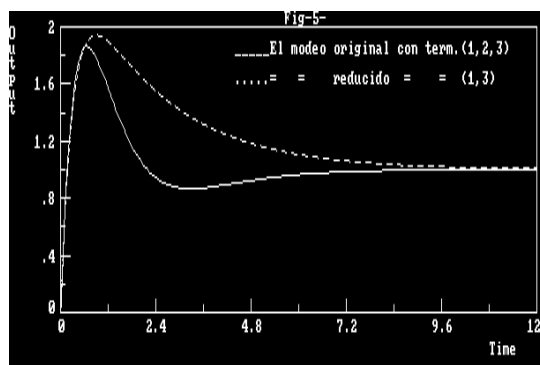
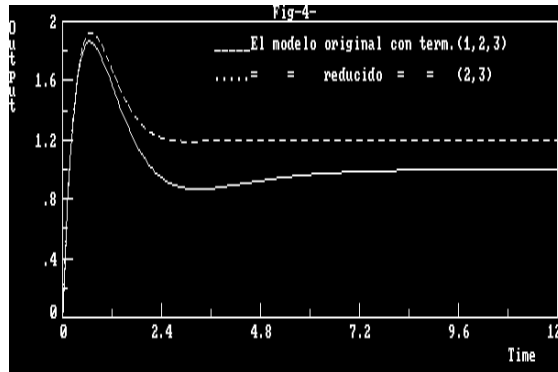


Figura (2): Un escalón en bucle abierto

A partir de la figura (2) y la ecuación (36), se puede concluir lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} gr(t)(1,3) = \lim_{t \rightarrow \infty} gr(t)(1,2) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} gr(t)(2,3) = 1.2$$

(37)

1- El modelo $gr(s)(2,3)$ da una mala aproximación en régimen permanente, peor que los modelos $gr(s)(1,3)$ y $gr(s)(1,2)$, y esto a causa de que éstos modelos $gr(s)(1,3)$ y $gr(s)(1,2)$ incluyen el primer término (\square_1, \square_1) y el modelo $g(s)(2,3)$ no lo tiene.

2- La figura (2) indica que el modelo $gr(s)(1,3)$ da una mejor aproximación que la del modelo de Routh $gr(s)(1,2)$ debido a que su participación (89.16 %) en el porcentaje de energía impulsional total es mayor que la del otro (15.21 %).

●- En la tabla (3) se calcula los valores de \square , a partir de los cuales se obtiene los modelos reducidos modificados.

El modelo no escalado	\overline{EIr}	EI	Valor de \square	El modelo escalado	El error antes del escalado	El error después del escalado	Entrada
$gr(s)(1,3)$	8.2222	9.2222	1.1216	$\hat{gr}(s)(1,3)$	0.39264 0.93233	0.25520 0.71005	impulso escalón
$gr(s)(2,3)$	9.0222	=	1.0222	$\hat{gr}(s)(2,3)$	0.05390	0.04290	impulso

Tabla (3): Los errores del modelo reducido antes y después del escalado

Los modelos reducidos modificados después de aplicar el valor de \square son:

$$\hat{gr}(s)(1,3) = \frac{8.524s + 1.812}{s^2 + 4.038s + 1.812} \quad (38)$$

$$\hat{gr}(s)(2,3) = \frac{7.767s + 6.132}{s^2 + 3.679s + 5.222} \quad (39)$$

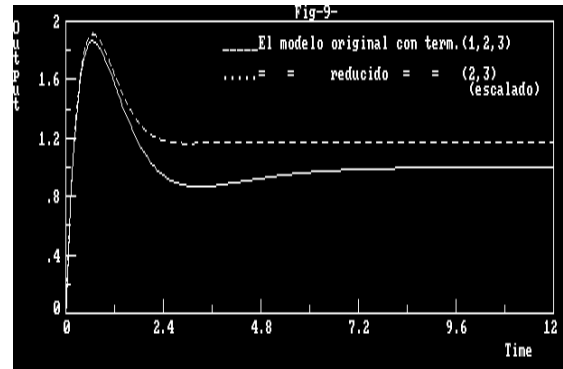
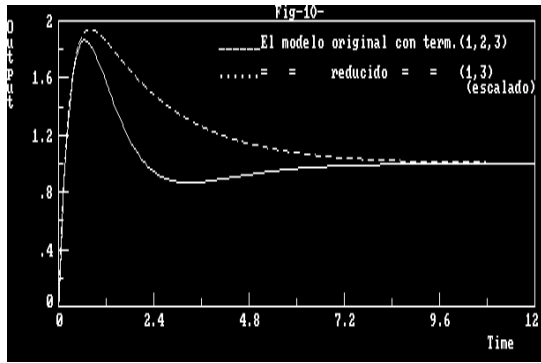


Figura (4): Las respuestas de los modelos reducidos modificados por un impulso

●- Comparación de los resultados de reducción de este método con otros técnicas.
Las técnicas más importantes y modernas en reducciones de modelos y controladores son:

1- Aproximaciones en norma de Hankel por Hinf, en el cual se retiene los mayores valores singulares de Hankel. Es decir, que en el modelo reducido, permanecen los estados más controlables/obseables dados que son los que tienen mayor relevancia en términos de entrada/salida [77,135,139 y 164].

2- Aproximación en el método de Schmr (Schmr) [140], en el cual las proyecciones se definen en términos de bases arbitrarias para los espacios propios izquierdo y derecho asociados con los valores propios grandes del producto $W_o * W_c$, de los gramianos de observabilidad y controlabilidad respectivamente, que se usan para construir el modelo reducido. Se propone dos métodos específicos para calcular estas bases, uno basado en la descomposición ordenada de Schur de W_o y W_c , y el otro basado en los factores de Cholesky de W_o y W_c .

En la tabla (4) se muestran las comparaciones entre el método de la reducción de la energía impulsional (Energía) con las técnicas en los puntos (1 y 2). Se observa que el modelo reducido por el método desarrollado es el que presenta menor error (0.042900).

El modelo	orden	Posiciones de polos	Errores
El modelo original	3	$-1.000 \pm 1.892e-008i$ $-5.000e-001$	----
El modelo reducido-Energía Impulsional	2	$-1.839 \pm 1.3558e+00i$	0.042900
El modelo reducido-Routh	2	$-0.695 \pm 2.7074e-01i$	5.800170
El modelo reducido-Hankel	2	$-0.497 \pm 1.8881e-01i$	0.084751
El modelo reducido-Schmr	2	$-0.274 \pm 3.3167e-01i$	0.140150

Tabla (4): Comparaciones entre el método desarrollado con otras técnicas

4 CONCLUSIONES

1- Se ha desarrollado el nuevo método de reducción de la energía impulsional del sistema, basado en retener en el modelo reducido las r parejas de parámetros (alfa y beta) que contribuyen en mayor medida a la energía de la respuesta impulsional. La ventaja fundamental de este método, aparte de su sencillez, es que todas las aproximaciones del modelo de la planta son estables.

2- El modelo reducido obtenido por la técnica de Energía Impulsional es más estable y da menos errores con respecto a los demás en distintas épocas de los años 70, 80 y 90.

3- El valor de \square de la reducción por aproximación escalada es inversamente proporcional a la energía impulsional del modelo reducido.

4- Esta técnica da el mejor resultado a pesar de la desigualdad de los coeficientes de expansión de MacLaurin.

5- Si se desea utilizar un modelo reducido $gr(s)$ para diseñar el controlador robusto de la planta $g(s)$, se puede interpretar el error de aproximación entre el modelo original y el modelo reducido como una cota de la incertidumbre en la metodología de control robusto. Este equivale a considerar a $g(s)$ como si fuera el sistema físico, con lo cual estabilizar robustamente a $gr(s)$ equivaldría a estabilizar, con el mismo controlador, a $g(s)$.

6- El error de reducción (la incertidumbre) en altas frecuencias indica que se están despreciando los fenómenos de mayor dinámica (modos más rápidos). Por eso se busca que hubiera precisión en $gr(s)$, hasta un límite de frecuencia, debido a las especificaciones sobre el ancho de banda elegido.

REFERENCIAS

- 1-Hutton y Friedland: 1975, Routh Aproximation for Reducing order of Linear Time-Invariant Systems, IEEE, 25, 4, 822-824.
- 2-T.N.LUCAS y DAVIDSON: 1983, Frequency-domain reduction of linear systems using Schwarz approximation, Int.J.Control, 37, 5, 1167-1178.
- 3-G.D.Lastman, N.K.Sinha, Sen and Rozsa: 1984, On the selection of states to be retained in a reduced-order model, IEE Proceedings, 131, 1, 15-21.
- 4-DAVISON: 1966, IEEE, 11, 93-101.
- 5-C.F.CHEN y L.S.SHIEN: 1968, Anovel approach to linear model simplification, Int.J.Control, 8, 6, 561-571.
- 6-Y.SHAMASH: 1974, On Chuang,s Continued Fraction Method of Model Reduction, IEEE, 1974, 20, 2, 267-275.
- 7-Y.SHAMASH: 1975, Linear system reduction using Pade aproximation to allow retention of dominante modes, Int.J.Control, 21, 2, 257-272.
- 8-Y.SHAMASH: 1975, Model reduction using the Routh stability criterion and the Padé approximation technique, Int.J.Control, 21, 3, 475-484.
- 9-M.R.Calf y M.Healey y M.: 1974, Continued-fraction model-reduction technique for multivariable systems, Proceeding C.y S., 121, 5, 393-395.
- 10-C.H.CHEN: 1974, Model reduction of multivariable control systems by means of matrix continued fraction, Int.J.Control, 20, 2, 225-238.
- 11-L.S.SHIEN y F.F.GAUDIANO: 1974, Matrix Continued fraction expansion and inversion by the generalized matrix Routh algorithm, Int.J.Control, 20, 5, 727-730.
- 12-L.S.SHIEN y Y.J.WEI: 1975, A Mixed Method for Multivariable System Reduction, IEEE, 429-432.
- 13-V.KRISHNAMURTHY and V. SESHADRI, 1978, Model Reduction Using the Routh Stability Criterion, IEEE, 24, 4, 729-731.
- 14-J.PAL: 1980, System Reduction by a Mixed Method, IEEE, 25, 5, 973-976.
- 15-T.C.CHEN,C.Y.CHANG y K.W.HAN: 1980, Model reduction Using the stability -equation method and the continued-fraction method, Int.J.Control, 32, 1, 81-94.
- 16-K.J.KHATWANI,R.K.TIWARI y BAJWA: 1980, IEEE, 25, 4,822-826.
- 17-BRUCE C.MOORE, 1981, Principle Component Analisis in Linear Systems Controllibility,Observability and model Reduction, IEEE, 27, 2, 17-31.
- 18-L.PERNEBO and L.M.SILVERMAN, 1982,Model Reduction Via Balance State Space Representation, IEEE, 27, 2, 382-387.
- 19-M.GOPAL and S.I.MEHTA:1982 On the Selection of the Eigenvales to be Retained in the Reduced Order Model, IEEE, 27, 2, 688-690.
- 20-A.LEPSCHY y VIARO: 1982,An improveinte in the Routh-Padé aprroximation techniques, Int.J.Control, 36, 4, 643-664.
- 21-F.ALEXANDRO, JR: 1984, Stable Partial Padé Approximations for Reduced Order Models, 29, 2, 159-161.
- 22-HU XIHENG: 1987, FF-Padé Method of Model Reduction in Frequecy Domain, IEEE, 32, 3, 243-246.
- 23-H.STAHI y P.HIPPE: 1988, Comments on FF-Padé Method of Model Reduction in Frequency Domain, IEEE, 33, 4, 415-416.
- 24-J.D.APLEVICH: 1973, Approximation of discrete linear systems, Int.J.Control, 17, 3, 565-575.
- 25-D.A.WILSON: 1974, Model reduction of multivariable systems, Int.J.Control, 20, 1, 57-64.
- 26-G.HIRZINGER y G.KREISSELMEIER: 1975, Int.J.Control, IEEE, 22, 3, 399-408.
- 27-R.A.EL-ATTAR y M.VIDYASAGAR: 1978, 23, 4, 731-733.
- 28-ROBERT E.SKELTON: 1980, Cost decomposition of linear system with application to model reduction, Int.J.Control, 32, 6,1031-1055.
- 29-E.EITELBERG: 1981, Int. J.Control, 34, 6, 1113-1123.
- 30-R.PORAT y B.F.: 1984, Int.J.Control, 39, 1, 95-113.
- 31-GLOVER K.: 1984, All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their Linf-error-bounds, Int.J.Control, 39, 1115-1193.
- 32-D.C.HYLAND y D.BERNSTEIN: 1985, 30, 12, 1201-1210.
- 33-M.G.SAFONOV, M.S.VERMA: 1985, Linf optimization and Hankel Approximation. 30, 3, 279-280.
- 34-M.G.SAFONOV, E.A.JONCKHEERE, M.VERMA: 1987, Synthesis of positive real multivariable feedback systems, Int.J.Control, 45, 3, 817-842.
- 35-POSTLETHWAITE, D.W.GU, and S.D.O,YOUNG: 1988, Some Computation Results on Size Reduction

in Hinf Design, IEEE, 33, 2, 177-185.

36-M.G.SAFONOV and R.Y.CHIANG: 1988, Schur Balanced Model Reduction, IEEE.

37- = = = and D.J.N.LIMEBEER: 1990, Optimal Hankel Model Reduction For Nonminimal Systems, IEEE, 1990, 35, 4, 496-502.