

TRANSF: Una herramienta para el aprendizaje de la transformada de Fourier y sus propiedades

M^a Teresa Alvarez Alvarez
Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática, ETS Ingeniería Informática
Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid
teresa@autom.uva.es

Begoña Hernández Brota
Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática, ETS Ingeniería Informática
Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid
filtros@autom.uva.es

Resumen

En este trabajo se presenta una herramienta para facilitar el aprendizaje de la transformada de Fourier y sus propiedades. Para ello se han desarrollado una serie de applets en Java que permiten al usuario realizar sus propios ejercicios de forma sencilla y clara. Además se han incluido páginas HTML donde se presentan los aspectos teóricos de la transformada de Fourier.

Palabras Clave: Fourier, Java, Internet, señal, frecuencia.

1 INTRODUCCIÓN

Estamos inmersos en la *era de Internet*, el desarrollo de las páginas Web y de los navegadores ha permitido que hoy día puedan darse diferentes niveles de integración de la tecnología a un curso, haciendo posibles tareas tan diversas como: búsqueda de información, comunicación alumno-profesor o entre alumnos, administración de cursos, distribución de material, empleo de multimedia en el aula, desarrollo de tutoriales de aprendizaje, creación de laboratorios virtuales (donde la animación y la simulación reemplazan experimentos físicos) y laboratorios remotos (que permiten el ajuste de parámetros y/o la ejecución de experimentos desde un lugar remoto).

Retomando este último punto, podemos crear aplicaciones que puedan ser accesibles desde todos los ordenadores sin tener porqué instalarlas en el nuestro. Esto permite plantearse nuevas formas de aprendizaje, permitiendo que se realicen prácticas de asignaturas de forma remota. Ejemplos de este último aspecto se presentaron en las II Jornadas de Trabajo sobre “Enseñanza vía Internet/Web de la Ingeniería de Sistemas y Automática” ([EIW]) celebradas en Madrid a finales de abril de 2001. En la bibliografía

se pueden encontrar numerosos ejemplos de este tipo de aplicaciones ([Overstreet], [Antsaklis], entre otros).

Es evidente que la apertura de estos nuevos campos, introduce una mayor flexibilidad de tiempo y espacio en el proceso educativo. Es en la formación fuera del aula o formación a distancia donde quizás exista un potencial más grande para aprovechar las posibilidades de las nuevas tecnologías, aunque la integración de la tecnología de la información con los cursos tradicionales pueden servir como un apoyo muy efectivo a la docencia si se la utiliza adecuadamente. En este caso particular, podemos hacer que el aprendizaje de una determinada materia sea más visual e interactivo.

Con esta aplicación se ha tratado de enfocar el tema de las **transformadas y series de Fourier** desde un punto totalmente didáctico. Estos temas son importantes dentro de las ingenierías y su estudio ocasiona problemas a los alumnos porque en ocasiones no comprenden su utilidad ni importancia. Está diseñada pensando sobre todo en alumnos de la Universidad de Valladolid, estudiantes de informática que tengan la asignatura de *transmisión de datos*. Pero su utilización por cualquier persona interesada en el tema es inmediata. En todo momento se ha intentado dar una idea que vaya más allá de conceptos puramente matemáticos.

Esta herramienta está formada por varios documentos en HTML que forman una *pagina web*. En estos puede encontrarse la teoría necesaria para adquirir unas nociones básicas sobre conceptos fundamentales, así como ejemplos sencillos sobre los distintos temas que se están tratando.

Desde dicha página pueden acceder a la realización de las distintas propiedades que están programadas en Java. Los resultados se obtienen mediante *applets*, que son unas aplicaciones un tanto especiales, que se ejecutan dentro de un navegador o

browser al cargar una página HTML desde un servidor web. El applet se descarga desde el servidor y no requiere instalación en el ordenador donde se encuentra el browser.

La gran ventaja de utilizar Java para la implementación es que es totalmente independiente de la CPU que utilizemos, y por tanto no está sujeta a los continuos cambios ni a los distintos tipos de estas que existen. Se crea un “*código neutro*”, que se ejecuta sobre una “*máquina hipotética o virtual*” denominada **JVM**, que es quien interpreta el código neutro convirtiéndolo a código particular de la CPU utilizada.

1.1 Objetivos

En este trabajo se pretende acercar de una forma más sencilla conceptos que resultan complicados de entender en la teoría. Nos hemos propuesto que entender y asimilar todo lo relacionado con las **transformadas y series de Fourier** sea más ameno y sencillo que usando sólo la pizarra como herramienta, para lo que nos basaremos, fundamentalmente, en representaciones gráficas.

Se ha intentado conseguir que el usuario sienta que tiene total libertad sobre lo que pretende realizar, para ello se le proporciona libertad a la hora de introducir los distintos valores que se necesitan como entrada en las distintas situaciones: periodo, frecuencia, rango en el que se va a mostrar la señal obtenida.

También se otorga versatilidad a la hora de poder introducir sus propias funciones y calcular su transformada.

Para aportar ayuda a la realización de esta práctica se hace una breve exposición de la teoría en la que se fundamenta dicha aplicación sin entrar en demasiados detalles sobre cálculos matemáticos, ya que complicarían en exceso la asimilación de nociones fundamentales. La teoría se entremezcla con ejemplos sencillos que tratan de ir introduciendo como va a ser la presentación de esta aplicación.

Se ha pretendido que el manejo de esta aplicación sea muy fácil para que las personas que realicen esta práctica se centren en lo que quieren llevar a cabo y no se dispersen buscando cómo conseguir que salga el cuadro de entrada de datos para introducir unos nuevos, o si lo que sale dibujado se refiere al dominio del tiempo o de la frecuencia. Se ha prestado atención en que todo lo que se presente en pantalla haya quedado lo más claro posible.

Con el carácter visual que tiene esta aplicación se intenta lograr que se vea de una manera gráfica lo que sucede al aplicar las distintas propiedades que exponen. Esperamos que la frase “*una imagen vale más que mil palabras*” sea cierta y consigamos que esta forma de aprendizaje sea amena y que sirva para mostrar como se puede utilizar la transformada de Fourier para el tratamiento de señales.

La gran ventaja de utilizar Java para la implementación es que es totalmente independiente de la CPU que utilizemos, y por tanto no está sujeta a los continuos cambios ni a los distintos tipos de estas que existen. Se crea un “*código neutro*”, que se ejecuta sobre una “*máquina hipotética o virtual*” denominada **JVM**, que es quien interpreta el código neutro convirtiéndolo a código particular de la CPU utilizada.

2 LAS SEÑALES Y FOURIER

Desde el momento que nos planteamos la necesidad de comprender el funcionamiento de los sistemas de transmisión de datos, estamos planteando indirectamente la necesidad de disponer de herramientas que nos permitan representar las señales. Estas herramientas tendrán carácter matemático. No se puede hablar de la mejor o peor representación, dependerá del tipo de señal que se esté considerando.

Determinadas propiedades de las señales no son observables en el dominio temporal y es necesario disponer de otro dominio que nos permita estudiarlas. Este dominio es el de la frecuencia. Para hacer ese estudio una de las técnicas más utilizadas es el análisis de Fourier ([Carlson], [Haykin93], [Haykin97], [Oppenheim]). Esta teoría es bastante conocida por lo que no la comentaremos más que en aquellos aspectos que son especialmente relevantes para el desarrollo de la aplicación TRANSF ([Brot]).

El objetivo principal de TRANSF es facilitar el aprendizaje de determinadas propiedades de la transformada de Fourier. Se trata de un análisis continuo, tanto en el tiempo como en la frecuencia. Cuando nos planteamos implementar esto en un ordenador tenemos que recurrir al equivalente discreto: la transformada discreta de Fourier (TDF o DFT, en inglés). No obstante para que los cálculos se realicen eficientemente se ha optado por implementar la transformada rápida de Fourier (FFT: Fast Fourier Transform). En concreto se ha implementado el algoritmo de diezmo en frecuencia ([Oppenheim]). Se ha intentado dejar claro al estudiante la diferencia entre el caso continuo y el discreto de la transformada de Fourier.

2.1 Propiedades

Las propiedades de la transformada de Fourier ([Haykin93]) y por ende, las de la transformada discreta ([Oppenheim]) tienen como objetivo facilitar el cálculo de la representación en el dominio de la frecuencia de señales que podemos expresar como sumas, desplazamientos, productos, derivadas, integrales,... de otras. Siempre que se pueda es preferible aplicar una o varias propiedades antes que aplicar la definición de la transformada (continua o discreta).



Figura 1 : Página principal

Cuando un estudiante se enfrenta por primera vez con el estudio de la transformada de Fourier, suele resultarle muy complicado entender las ventajas que aporta el uso de las propiedades. Por ello, hemos seleccionado algunas propiedades. El criterio seguido ha sido por una parte aquellas propiedades que son más sencillas de entender y por otro las más complicadas (la convolución, por ejemplo). Se enumeran a continuación las propiedades implementadas:

- Linealidad.
- Escalado en el tiempo.
- Desplazamiento en el tiempo.
- Desplazamiento en la frecuencia.
- Área encerrada en el dominio temporal.
- Área encerrada en el dominio de la frecuencia.
- Convolución en el tiempo ([WWW1], [WWW2]).
- Convolución en la frecuencia.

En aquellas propiedades que existen diferencias entre su interpretación en el caso continuo y el discreto se han explicado adecuadamente.

3 DESCRIPCIÓN DE LA APLICACIÓN

En este apartado comentaremos todos los aspectos relativos a la instalación del software, páginas HTML y los applets desarrollados.

3.1 Distribución del software

Para utilizar TRANSF se puede hacer mediante la instalación directa sobre el disco duro del ordenador, si es que no se dispone de conexión a Internet o accediendo a la dirección:

www.isa.cie.uva.es/proyectos/transf/portada.html
(disponible dentro de poco tiempo).

3.2 Páginas HTML

La página HTML ([Powell], [Rumbaugh], [Simpson], [WWW6]) principal se muestra en la Figura 1 . Esta página corresponde a la portada de la aplicación, sólo nos presenta nombre, autores y nos permite pasar a la página de contenidos (Figura 2): índice en la parte izquierda y el desarrollo en la parte derecha.

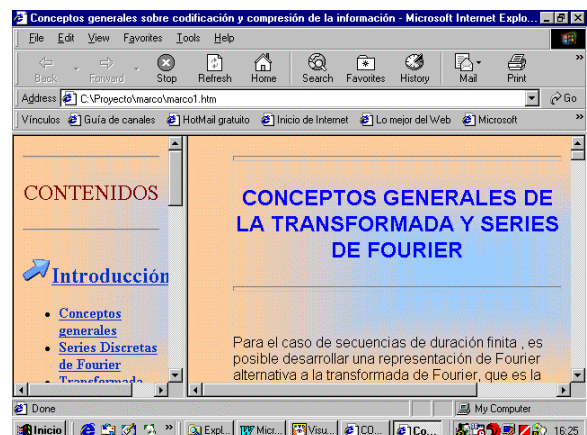


Figura 2: Página con contenidos

En la parte izquierda vemos “Introducción”, “Requisitos”, “Propiedades”, “realización de T.F”, todos ellos enlaces hacia otras páginas donde se muestran todos los datos referentes al tema escogido.

Los aspectos que se cubren en la teoría van desde las nociones básicas sobre señales hasta la descripción de los algoritmos para el cálculo de la FFT, así como las propiedades (Figura 3) de la transformada de Fourier.



Figura 3: Propiedades de la TF

3.3 Applets

Las páginas HTML comentadas en el apartado anterior sirven para introducir la base teórica. Una vez estudiada, el alumno debe pasar a realizar ejercicios. Para ello se han desarrollado varios applets en Java ([Vanhelsuwe], [WWW4], [WWW5], [WWW6]). La razón para escoger Java y no otro lenguaje o paquete (Matlab, por ejemplo) es que se trataba de:

- hacer un desarrollo independiente de la plataforma donde se fuese a ejecutar,
- que el usuario no necesitase disponer de software adicional y
- que funcionase en Internet.

Los applets desarrollados se dividen en dos grupos:

- Applets que calculan la transformada de una o varias señales y aplican alguna propiedad de la transformada a estas señales y
- Applets que calculan la representación en el dominio de la frecuencia de una señal introducida por el usuario. Los datos de la señal se pueden introducir gráficamente o usando el teclado.

Los applets que aplican alguna propiedad de Fourier tienen una pantalla de toma de valores como la de la Figura 4. Siempre hay que elegir el tipo de señal de la que se quiere calcular su transformada y aplicar una determinada propiedad:

- Pulso rectangular.
- Pulso triangular.
- Señal seno.
- Señal coseno.
- Delta de Dirac.
- Salto.

También se debe seleccionar el intervalo temporal donde estará definida la señal, así como la amplitud y el periodo (sólo en aquellos casos donde esto sea aplicable). En la pantalla nos aparecerán tantas señales como sean necesarias para poder aplicar la

propiedad. Es decir, si queremos aplicar la propiedad de linealidad, necesitaremos seleccionar dos señales, pero si queremos aplicar la propiedad de desplazamiento en el tiempo, entonces sólo será necesario seleccionar una. La pantalla de toma de datos se ajusta automáticamente a los datos que debe pedir al usuario. A continuación se muestra una gráfica con el espectro de magnitud de la señal o señales seleccionadas antes de aplicarles la propiedad elegida.

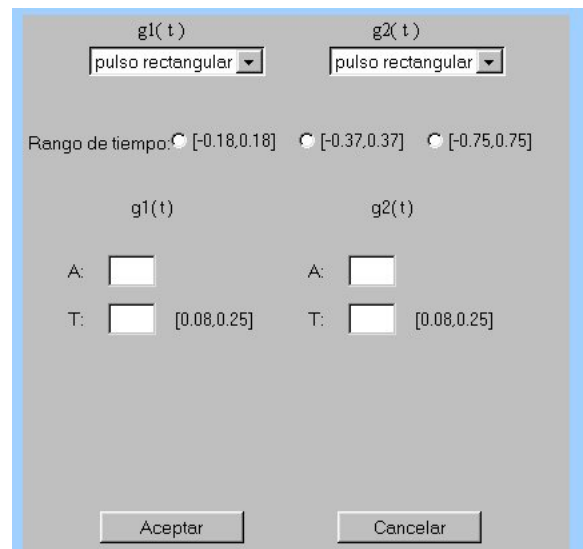


Figura 4 : Pantalla de toma de datos

Existen botones a lo largo de todo el applet en el que se ejecuta la propiedad. Al pulsarlos se visualizan imágenes, que contienen las señales que corresponden a lo que se indica en la etiqueta del botón pulsado. Por último siempre hay un botón "Cambiar función" que vuelve a mostrar el panel de entrada de datos para recoger los valores, de los campos correspondientes, necesarios para volver a ejecutar esta propiedad.

3.4 Ejemplos

En este subapartado mostraremos algunos ejemplos de los resultados obtenidos mediante los applets. Comenzaremos aplicando la propiedad de linealidad:

$$c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) \leftrightarrow c_1 G_1(t) + c_2 G_2(t)$$

a una señal coseno $\cos(2\pi t)$ y a un pulso rectangular $\text{rec}(t/0.2)$. Tomando ambas constantes igual a 1. La aplicación tras comprobar que los valores son correctos, nos dibujaría las dos señales en el dominio del tiempo, después los espectros de magnitud de ambas (Figura 5, Figura 6).

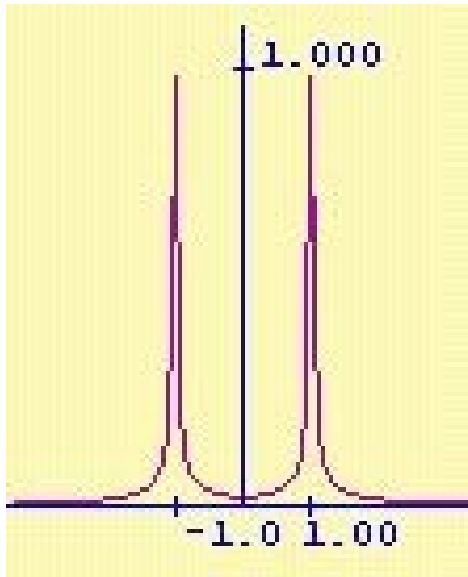


Figura 5 : Espectro de magnitud de la señal coseno

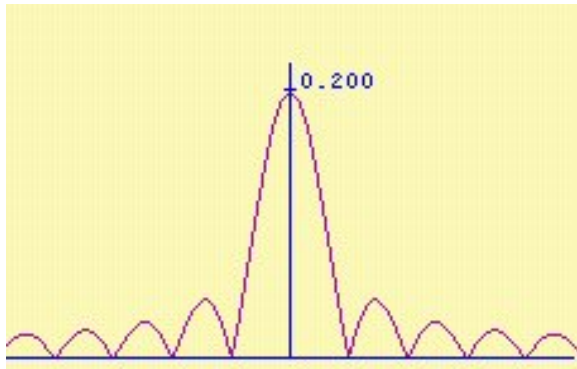


Figura 6: Espectro de magnitud del pulso

Para finalmente mostrar el espectro de magnitud de la señal resultado de la propiedad (Figura 7).

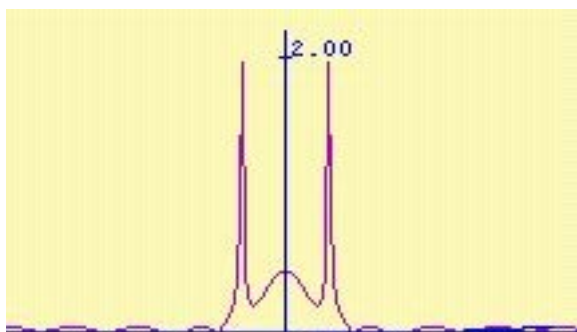


Figura 7: Resultado de la propiedad

Como segundo ejemplo, veamos que sucede cuando se aplica la propiedad desplazamiento en el tiempo:

$$g(t - t_0) \leftrightarrow G(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

ahora debemos obtener el mismo espectro de magnitud y fase diferente. Tomamos como señal de partida un pulso rectangular de amplitud 1 y duración

0.1 unidades temporales. Dibujamos la señal desplazada en el dominio del tiempo (Figura 8) y después el espectro de magnitud de esta nueva señal (Figura 9), que coincide con el de la señal sin desplazar.

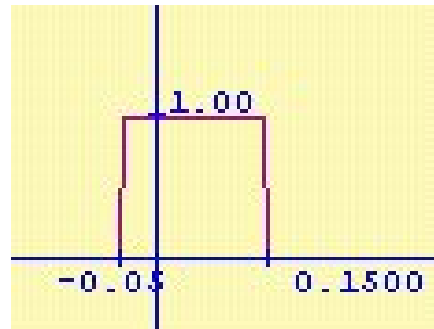


Figura 8 : Pulso desplazado -0.025 unidades

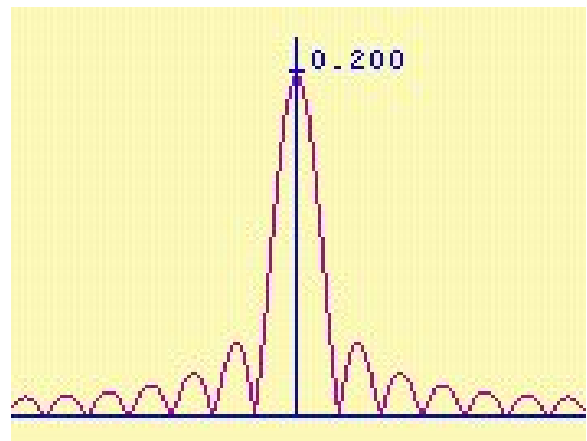


Figura 9: Espectro de magnitud del pulso desplazado

Tomando como referencia esta señal que hemos obtenido, aplicaremos la propiedad de escalado en el tiempo:

$$g(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

la nueva señal en el dominio temporal es la que se muestra en la Figura 10 y el espectro de magnitud es el de la Figura 11.

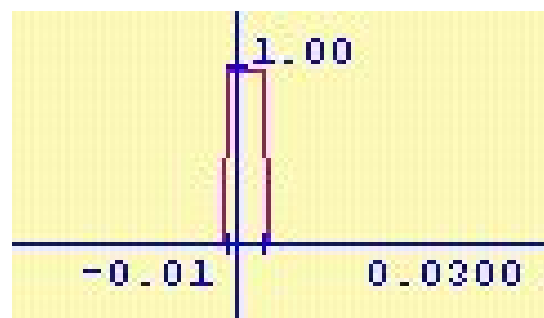


Figura 10: Pulso 'escalado' en el tiempo

Por último mostraremos un ejemplo de una de las propiedades que suele dar más problemas a los

estudiantes: la convolución en el dominio temporal. Tomaremos como señales un pulso rectangular de amplitud 1 y duración 0.1 y un pulso rectangular de la misma amplitud, pero duración doble. En la aplicación se muestran más gráficas, pero aquí sólo hemos seleccionado las más importantes: resultado en el dominio temporal (Figura 12) y resultado el espectro de magnitud (Figura 13).

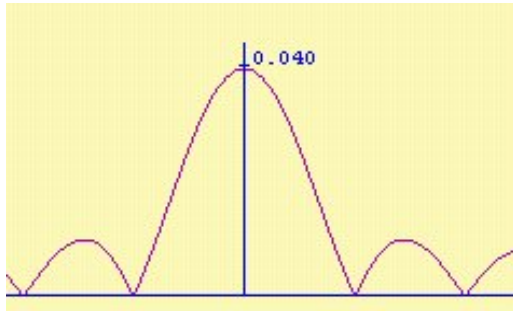


Figura 11: Espectro de magnitud

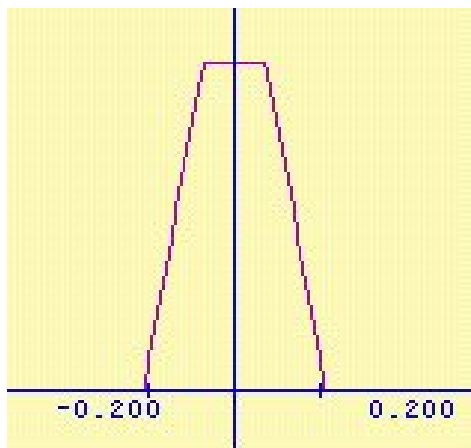


Figura 12: Convolución en el tiempo

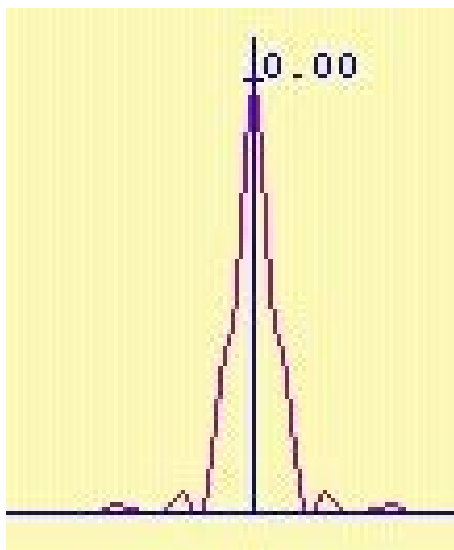


Figura 13: Producto en la frecuencia

Con este último applet se trata de mostrar al estudiante como una convolución en un dominio, equivale a un producto en el otro.

4 CONCLUSIONES

Mediante este trabajo se ha tratado de desarrollar una herramienta que permita al estudiante que se acerca por primera vez al estudio del análisis de Fourier la realización de ejercicios sencillos, pero a la vez clarificadores de los contenidos teóricos.

Se ha realizado usando applets de Java para el desarrollo de los ejercicios y páginas HTML para la presentación de la teoría. De esta forma se facilita la portabilidad de la aplicación y su difusión en entornos muy diversos.

Está previsto continuar el trabajo ampliando el tipo de señales con las que es posible trabajar. Así como dar un tratamiento adecuado a las series de Fourier y dedicar un applet a una comparativa entre diferentes algoritmos para la FFT.

BIBLIOGRAFÍA

- [Antsaklis] Antsaklis, P., T. Basar, R. de Carlo, N. H. McCKamroch, M. Spong y S. Yurkovich, "Report on the NSF/CSS Workshop on New Directions in Control Engineering Education", IEEE Control Systems Magazine, pp53-58, vol. 19, 1999
- [Booch] Booch G., "Object-Oriented Analysis and Design with Applications " (2ª edición), Ed. Addison-Wesley , 1994
- [Brotá] Brotá Hernández, Begoña, "TRANSF: Aplicación para el tratamiento de señales mediante la transformada de Fourier", Proyecto Fin de Carrera de la ITI Gestión de la Universidad de Valladolid, Junio 2001
- [Carlson] Carlson Gordon E., "Signal and Linear Systems Analysis", Ed. Prentice Hall
- [Chan] Chan Mark C., Griffith Steven W., Lasi Anthony F., "1001 tips para programar en Java", Ed. McGraw-Hill , 1997
- [Deitel] Deitel y Deitel, "Cómo programar en Java", Ed. Prentice Hall ,1995
- [EIW] Eiwisa 2001, Madrid, 2001
- [Frentzen], Frentzen Jeff y Sobotka Henry, "Superutilidades para Java Script", Ed. McGraw-Hill ,1999
- [Haykin97] Haykin S., "Signals and Systems", Ed. John Wiley, 1997
- [Haykin93] Haykin S., "Communication Systems" (3 edición), Ed. John Wiley, 1993
- [Oppenheim] Oppenheim Alan y W. Schafer Ronald, "Tratamiento de señales en tiempo discreto" (2ª edición), Ed. Prentice Hall, 1998

- [Overstreet] Overstreet, J. Y Anthony Tzes, "AnInternet-Based Real-Time Control Engineering Laboratory", IEEE Control Systems Magazine, pp19-34, Vol.19, 1999
- [Powell], Powell T., "*Manual de referencia de HTML*", Ed. McGraw Hill , 1998
- [Rumbaugh] Rumbaugh] J., "*Object Oriented Modeling and Design*", Ed. Prentice Hall ,1991
- [Simpson] Simpson A., "*La biblia para la edicion de paginas en HTML*", Ed. Anaya, 1997
- [Vanhelsuwe] Vanhelsuwe, L.; Phillips, I.; Hsu, G.; Sankar, K.; Ries, E.; Rohaly, T.; Zukowski, J., "*La biblia de Java*", Ed. Anaya Multimedia, 1997
- [WWW1] www.ice.hansung.ac.kr/~jun/Java/convolution
- [WWW2] www.Theorem.net/control.html
- [WWW3] <http://www.web.sitio.net/cursos/js.html/>
- [WWW4] <http://www.wmaestro.com/webmaestro/>
- [WWW5] <http://home.netscape.com/eng/mozilla/Gold/handbook/javascript/index.html>
- [WWW6] <http://www.coolnerd.com>