

# PLANIFICACIÓN DE MANIOBRAS RESTRINGIDAS EN VEHÍCULOS CON REMOLQUE

F. Gómez-Bravo\*  
fgbravo@cartuja.us.es

F. Cuesta  
fedec@cartuja.us.es

A. Ollero  
aollero@cartuja.us.es

Depto. Ingeniería de Sistemas y Automática. Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos s/n. 41092 Sevilla (Spain). Fax:+34-95-4487340.

\*Depto. Ingeniería Electrónica, Sistemas Informáticos y Automática. Escuela Politécnica Superior,  
Universidad de Huelva. Carretera de Palos-La Rábida s/n. 21071 Huelva.

## RESUMEN

En este artículo se aborda la planificación de maniobras en sistemas formados por un vehículo tractor y un vehículo remolque. Se ha utilizado el concepto de maniobra restringida para la formalización del método de planificación. Se ilustra con especial énfasis el diseño de una maniobra que permite la reorientación del vehículo remolque.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema de planificación de trayectorias en lugares con fuertes restricciones espaciales, tales como pasillos estrechos, obstáculos muy cercanos y envolventes, etc., impone severas limitaciones a la generación de trayectorias continuas en el signo de la velocidad. En estos casos, donde la geometría del entorno dificulta, o a veces impide, la obtención de trayectorias en las que el vehículo no se detenga, es posible obtener soluciones basadas en el concepto de maniobra.

El concepto de maniobra cobra especial interés en los sistemas con restricciones no holónomas, en los cuales, las posibles direcciones de movimiento del sistema están restringidas. En concreto, los sistemas donde más frecuentemente se han utilizado maniobras son los vehículos rodados; tanto es así, que el diseño de maniobras para estos vehículos ha orientado la caracterización general de las mismas.

Desde el punto de vista estrictamente semántico, maniobrar consiste en “realizar operaciones con un vehículo para cambiar su rumbo”. No obstante, el concepto de maniobra necesita una definición más precisa si se desea usar de forma sistemática como técnica de planificación.

En Latombe [4], se define el concepto de maniobra en un robot móvil rodado. Para ello, se introduce el concepto de inversor. Un inversor es un punto de la trayectoria donde la velocidad del robot cambia de signo. De esta forma, para Latombe, una maniobra consiste en una concatenación de trayectorias

separadas por inversores.

Con el fin de realizar una prueba constructiva de la controlabilidad de un vehículo, con la cinemática de un automóvil, que además presenta restricciones en el valor de la curvatura, Latombe diseña dos tipos de maniobras: una de ellas se utiliza para generar un desplazamiento lateral (ver fig. 1a), la otra se utiliza para producir un giro del vehículo sobre un punto (ver fig. 1b).

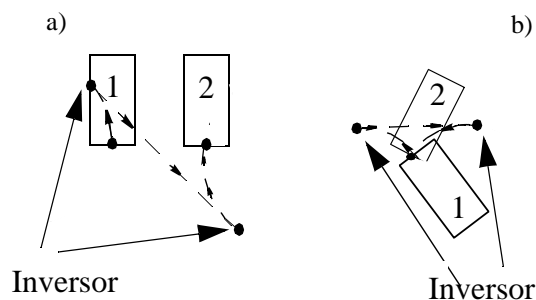


Fig.- 1: Maniobras definidas por Latombe

Como característica principal de estos dos tipos de maniobras puede señalarse el cambio de valor de una de las variables de configuración, manteniendo, al final de la maniobra, inalterado el valor de las restantes. Esta característica es común a otras técnicas de planificación utilizadas en sistemas no holónomos de distinta naturaleza, como es el caso de los manipuladores flotantes [7][1].

Dicha característica va a ser aprovechada para definir un tipo de maniobra de aplicación específica en sistemas no holónomos: la *maniobra restringida*. En concreto, en este artículo se describe un método para la generación de maniobras en sistemas no holónomos y se aplica a un sistema formado por un vehículo tractor con un remolque.

La organización del artículo es como sigue: a continuación se introducen conceptos para formalizar la descripción, diseño y generación de maniobras restringidas. En la Sección 3, se aplican estas técnicas al caso de un vehículo tractor con remolque, centrándose en el caso de una maniobra de

reorientación del remolque. El artículo termina con las conclusiones y referencias.

## 2. DESCRIPCIÓN, DISEÑO Y GENERACIÓN DE MANIOBRAS RESTRINGIDAS

Una *maniobra restringida* es una trayectoria al final de la cual sólo cambian los valores de ciertas variables de configuración; en el resto de variables, los valores finales son iguales a los valores iniciales. Este concepto puede considerarse aplicable de forma genérica a todos los sistemas no holónomos.

De forma similar a como hace Latombe, podrá construirse un algoritmo, mediante el cual, generar una sucesión de maniobras restringidas, que permitan alcanzar cualquier configuración final desde una configuración inicial arbitraria. Como consecuencia de ello, será posible demostrar la controlabilidad del sistema.

Desde un punto de vista formal, la definición de maniobra restringida evita la necesidad de separar todas las trayectorias de la maniobra mediante inversores, permitiendo obtener mayor variedad de soluciones.

### 2.1 Descripción de maniobras restringidas

La generación de maniobras, en sistemas no holónomos, está vinculada a los vectores campo que satisfacen las restricciones cinemáticas.

Sea  $C$  el espacio de configuración de un sistema no holónimo de dimensión  $n$ ; sea  $q$  un punto perteneciente a este espacio. Dado un vector campo  $\Psi$ , que satisface las restricciones no holónomas, y una trayectoria paramétrica,  $\Upsilon_{\Psi}(t)$ , que comienza en  $q$  y sigue al vector  $\Psi$ , dicha trayectoria puede expresarse de la forma:

$$\Upsilon_{\Psi}(t) = q \cdot e^{t\Psi} \quad (1)$$

Dada una familia de  $m$  vectores campo  $\Psi_i$  pertenecientes al espacio tangente, que además cumplen las restricciones cinemáticas, se puede definir una aplicación de  $C \times \mathbb{R}^m$  en  $C$  de la forma:

$$\begin{aligned} [q_i] \rightarrow \Phi_{\Psi_i}(q_i, t_i) &\equiv q_i \cdot e^{t_1\Psi_1} \cdot e^{t_2\Psi_2} \dots e^{t_m\Psi_m} \\ &= q_f = \Upsilon_{\Psi_m}(t_m) \\ \Upsilon_{\Psi_m}(0) &= \Upsilon_{\Psi_{m-1}}(t_{m-1}) \\ \dots \\ \Upsilon_{\Psi_1}(0) &= q_i \end{aligned} \quad (2)$$

Es decir, a todo punto del espacio de configuración, se le asocia la configuración final que se alcanzaría si se siguieran secuencialmente las trayectorias asociadas a cada uno de los vectores  $\Psi_i$ , desde  $t=0$  hasta  $t=t_i$ .

De acuerdo con este formalismo, dada una configuración  $q(q_1, \dots, q_n)$  y una familia de  $m$  vectores campo  $\Psi_i$ , una maniobra restringida para la variable  $q_d$  se define como la pareja  $(t_i, \Phi_{\Psi_i})$  que cumple:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Psi_i}(q, t_i) &\equiv q \cdot e^{t_1\Psi_1} \dots e^{t_m\Psi_m} \\ &= (q_1, \dots, q_d + \Delta q_d, \dots, q_n) \end{aligned} \quad (3)$$

Por tanto, una maniobra restringida consiste en una trayectoria que genera cierto incremento en un determinado número de variables.

El diseño de maniobras restringidas se basará en la obtención de una familia de  $m$  vectores campo y  $m$  parámetros que permitan encontrar una relación como la ecuación (3).

## 3. SISTEMA TRACTOR-REMOLQUE

Un sistema tractor-remolque está compuesto por un vehículo tractor delantero cuya cinemática se corresponde con la de un automóvil y un vehículo remolcado (ver fig. 2).

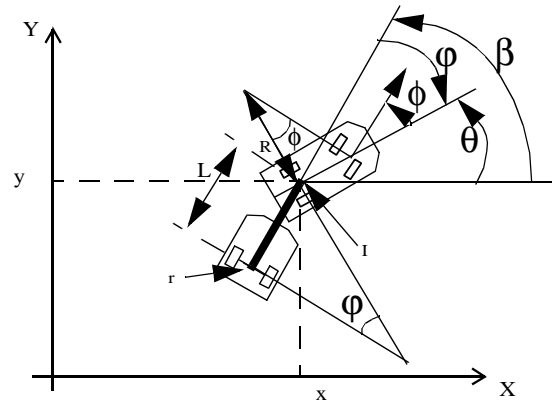


Fig.- 2: Sistema tractor-remolque.

De acuerdo con esta figura, el remolque se mueve sobre un eje con dos ruedas, lo que implica que también estará sujeto a restricciones cinemáticas no holónomas. El movimiento del remolque se debe a la tracción o empuje que el vehículo delantero ejerce sobre él. Esta relación se establece a través de una ligadura pasiva de longitud  $L$ , que une los puntos  $I$  y  $r$ , centros de los respectivos ejes traseros de ambos vehículos. La ligadura está unida rígidamente con el eje del remolque, por lo que será en todo momento tangente a la trayectoria que describa el punto  $r$ . La unión de la ligadura con el punto  $I$  es articulada, siendo  $\phi$  el ángulo que forma la ligadura con el eje longitudinal del vehículo tractor.

Se considera de forma genérica que los dos vehículos están modelados geoméricamente como rectángulos que se mueven en  $W=R^2$ . Tradicionalmente ([4],[7],[6]) se ha representado la configuración de este sistema por la cuaterna  $(x, y, \theta, \beta)$ , donde  $(x, y) \in R^2$  son las coordenadas del punto  $I$ ;  $\theta \in [0, 2\pi]$  es el ángulo entre el eje longitudinal del rectángulo que define el vehículo tractor y el eje  $x$  del sistema de referencia;  $\beta \in [0, 2\pi]$  es el ángulo entre el eje longitudinal del rectángulo que define el remolque y el eje  $x$  del sistema de referencia. Por lo tanto, el espacio de configuración es  $R^2 \times S^1 \times S^1$ . En estos estudios, se adopta el modelo cinemático:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{\sin(\theta - \beta)}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ v(t)\rho(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde  $v(t)$  y  $\rho(t)$  son los parámetros de control del sistema;  $v(t)$  representa la velocidad lineal del punto  $I$ ,  $\rho(t)$  representa la curvatura de la trayectoria seguida por este mismo punto.

Relacionados con estos parámetros se encuentran De forma similar se definen  $R(t)$  y  $\phi$ :

$$R(t) = \frac{1}{\rho(t)} = \frac{l}{\tan \phi} \quad (5)$$

donde  $l$  es la longitud del vehículo tractor y existe la restricción  $\phi \in [-\phi_{max} + \phi_{max}]$ .

Sean  $(x_2, y_2) \in R^2$  las coordenadas cartesianas del punto  $r$ . Bajo la suposición de que el contacto entre cada una de las ruedas y el suelo posee suficiente rozamiento como para considerar que no se produce deslizamiento al rodar, se establecen las restricciones no holónomas:

$$\begin{aligned} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta &= 0 \\ \dot{x}_2 \sin \beta - \dot{y}_2 \cos \beta &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Estas relaciones pueden transformarse de forma que sólo afecten a las variables de configuración, adquiriendo la forma:

$$\begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

Los vectores columna del modelo cinemático del vehículo cumplen la restricción cinemática (7) y son linealmente independientes [2]. Por tanto, forman una base de la distribución  $\Delta$  generada por (7). En efecto, dichos vectores son:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & -\frac{\sin(\theta - \beta)}{L} \end{bmatrix}^T \\ \Lambda_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (8)$$

Puede comprobarse que el vector  $\Lambda_1$  se corresponde con una situación en la que el vehículo tractor se encuentra marchando en línea recta (la curvatura de la trayectoria que describe el punto  $I$  es constante e igual a cero), hacia adelante con velocidad constante igual a 1. El vector  $\Lambda_2$  se corresponde con una rotación del vehículo tractor sobre el punto  $I$ , en la que no hay traslación y, por lo tanto, el remolque se mantiene inmóvil.

Con objeto de simplificar la definición de maniobras, se utilizará un modelo equivalente a (4). Así, en lugar de la variable de configuración  $\beta$  se ha utilizado la variable  $\phi$ , donde la relación entre ambas es:

$$\phi = \theta - \beta \Rightarrow \dot{\phi} = v(t)\rho(t) - \frac{v(t)\sin(\theta - \beta)}{L} \quad (9)$$

por lo que el nuevo modelo es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{\sin(\phi)}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ v(t)\rho(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

y la expresión (7) que establece las restricciones no holónomas se transforma en:

$$\begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & -L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Los vectores columna de este modelo cinemático forman una base de la distribución  $\Delta$  generada por (11); dichos vectores son:

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & -\frac{\sin \phi}{L} \end{bmatrix}^T ; \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

Estos dos vectores representan situaciones equivalentes a los vectores de (8). El vector  $\Omega_1$  se corresponde con una situación en la que el vehículo tractor marcha en línea recta hacia adelante, con velocidad constante igual a 1, la curvatura de la trayectoria que describe el punto "I" es constante e igual a cero. El vector  $\Omega_2$  se corresponde con una rotación del vehículo tractor sobre el punto "I", en la que no hay traslación, el remolque no se mueve, por lo tanto, como puede deducirse de (9), la velocidad de cambio de las magnitudes  $\phi$  y  $\theta$  es idéntica.

Evidentemente, debida a la limitación del ángulo de conducción del vehículo delantero, el valor de la curvatura que puede seguir el vehículo se encuentra acotado superiormente. Sin embargo, el vector  $\Omega_2$  no cumple la restricción de acotación de curvatura [2] pues supone la generación de una trayectoria de radio de curvatura igual a cero.

Por tanto, no será útil para el diseño de las maniobras. No obstante, es posible definir dos vectores, combinación lineal de los anteriores, que sí cumplen con ambas restricciones:

$$\begin{aligned} \Omega_1 + c_1\Omega_2 = \Omega_3 &= \left[ \cos\theta, \sin\theta, c_1, c_1 - \frac{\sin\phi}{L} \right]^T \\ \Omega_1 + c_2\Omega_2 = \Omega_4 &= \left[ \cos\theta, \sin\theta, c_2, c_2 - \frac{\sin\phi}{L} \right]^T \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $c_1 > |\rho_{max}|$  y  $c_2 < -|\rho_{max}|$

Estos vectores se corresponden con las siguientes situaciones:  $\Omega_3$  genera trayectorias en las que el vehículo tractor sigue un arco de circunferencia de curvatura constante positiva, con velocidad igual a 1;  $\Omega_4$  genera trayectorias en las que el vehículo tractor recorre un arco de circunferencia de curvatura constante negativa, con velocidad igual a 1.

Puede comprobarse fácilmente que la familia de vectores:

$$\Omega_c = (\Omega_1, \Omega_3, \Omega_4),$$

cumple la condición de controlabilidad, pues:

$$\begin{aligned} [\Omega_1, \Omega_3] = \Omega_5 &= \left[ -c_1 \sin\theta, c_1 \cos\theta, 0, \frac{-c_1 \cos\phi}{L} \right]^T \\ [\Omega_1, \Omega_4] = \Omega_6 &= \left[ -c_2 \sin\theta, c_2 \cos\theta, 0, \frac{-c_2 \cos\phi}{L} \right]^T \\ [\Omega_3, \Omega_4] = \Omega_7 &= \left[ b \sin\theta, (c_1 + c_2) \cos\theta, 0, \frac{b \cos\phi}{L} \right]^T \end{aligned} \quad (14)$$

donde

$$b = (c_2 - c_1).$$

Con lo que es fácil demostrar que:

$$\begin{aligned} \text{rango} [\Omega_1, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \Omega_6, \Omega_7] &= 4 \\ \Rightarrow \dim[CLA(\Delta)] &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier punto del espacio de configuración es alcanzable mediante trayectorias generadas por la familia de vectores  $\Omega_c$ .

Así pues, se podrán definir cuatro tipos de maniobras restringidas, una por cada variable de estado. Para

ello es posible basarse en los diseños realizados en el caso del automóvil [3],[2].

Las expresiones del modelo cinemático de este sistema para las variables  $x, y, \theta$ , coinciden con las del modelo cinemático de un automóvil. Por lo tanto, pueden escogerse como maniobras restringidas correspondientes a estas tres variables, las maniobras diseñadas para las variables homónimas del automóvil [2],[3]. El único inconveniente de esta elección se encuentra en el incremento que sufre la variable  $\phi$  a lo largo de ellas, ya que, están diseñadas sin tener en cuenta esta variable. En consecuencia, la trayectoria definida en el espacio B.S. no será cerrada. Este inconveniente puede resolverse con el diseño de una maniobra restringida para la variable  $\phi$ . En efecto, tras obtener este diseño, es posible efectuar una maniobra de las definidas para variar el valor de  $x$ , y ó  $\theta$  y, posteriormente, ejecutar una nueva maniobra, de forma que la variable  $\phi$  vuelva a su valor original.

En la siguiente sección se muestra cómo, a partir de la familia de vectores campo  $\Omega_c$  puede diseñarse una maniobra restringida que permite cambiar el valor de la variable  $\phi$ .

### 3.1 Maniobra para la variable dependiente $\phi$

Para este tipo de maniobra, el espacio B.S. está definido por las variables  $(x, y, \theta)$ . En primer lugar se obtendrán los vectores susceptibles de ser usados para definir la maniobra.

El primer paso consiste en buscar un vector que permita conseguir  $\dot{\phi} = 0$ . Esta condición, al ser sustituida en la restricción cinemática, permite expresar:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x} \cos\theta \sin\phi + \dot{y} \sin\theta \sin\phi}{L} \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\phi = cte$$

esta expresión se convierte en integrable si se establecen las relaciones:

$$\dot{x} = \cos\theta \quad ; \quad \dot{y} = \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{\sin\phi}{L} = cte \quad (16)$$

Por tanto, el vector buscado es:

$$\Omega_{p\phi} = \left[ \cos\theta \quad \sin\theta \quad \frac{\sin\phi}{L} \quad 0 \right]^T \quad (17)$$

Los valores de la curvatura y el radio de curvatura correspondientes a esta situación se denominarán:

$$c_\phi = \frac{1}{R_\phi} = \frac{\sin\phi}{L} \quad (18)$$

Este vector representa una situación en la que tanto el vehículo tractor como el remolque recorren una trayectoria que se corresponde con un arco de circunferencia de curvatura constante. Desde un punto de vista cinemático esta situación tiene lugar cuando los centros de rotación de ambos vehículos coinciden (ver fig. 3).

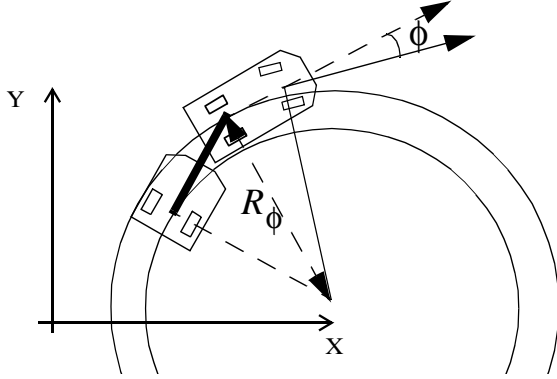


Fig.- 3: Trayectoria generada por el vector  $\Omega_\phi$

En segundo lugar, se buscarán relaciones entre las variables independientes, que permitan integrar el modelo. Para ello se despeja la variable dependiente en (11):

$$\dot{\phi} = \dot{\theta} - \frac{\dot{x} \cos \theta \sin \phi + \dot{y} \sin \theta \sin \phi}{L} \quad (19)$$

Una forma de hacer esta expresión integrable consiste en establecer las relaciones:

$$\dot{x} = c \cos \theta ; \dot{y} = c \sin \theta ; \dot{\theta} = c = cte \quad (20)$$

que aplicado a (19) la convierte en una expresión integrable:

$$\dot{\phi} = c - \frac{\sin \phi}{L} \quad (21)$$

Tanto  $\Omega_3$  como  $\Omega_4$  y  $\Omega_1$  permiten establecer estas relaciones, con la particularidad en  $\Omega_1$  de que  $cte=0$ . Con estos vectores, el modelo cinemático es integrable para las variables  $x, y, \theta$  [2]. En el caso de la variable  $\phi$  habrá que estudiar en particular cada uno de los vectores.

Considerando el vector  $\Omega_1$  e igualando:

$$\left[ \dot{x} \dot{y} \dot{\theta} \dot{\phi} \right]^T = \Omega_1$$

se obtiene:

$$\dot{\phi} = -\frac{\sin \phi}{L}$$

integrando se alcanza la expresión:

$$\frac{t}{L} = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{1}{\sin \phi} d\phi = \left[ -\ln \left( \frac{1 - \cos \phi}{\sin \phi} \right) \right]_{\phi_0}^{\phi_f} \quad (22)$$

Por tanto será posible expresar el valor de  $\phi$  en función de  $t$ :

$$\phi(t) = \xi(t, \phi_0) = \text{asin} \left( \frac{2\delta(t)}{1 + \delta(t)^2} \right) \quad (23)$$

donde:

$$\delta(t) = e^{G_1 - \frac{t}{L}} ; \quad G_1 = \ln \left( \frac{1 - \cos \phi_0}{\sin \phi_0} \right) \quad (24)$$

Considerando el caso del vector  $\Omega_4$ ,  $c=c_2$ , igualando:

$$\left[ \dot{x} \dot{y} \dot{\theta} \dot{\phi} \right]^T = \Omega_4$$

se obtiene:

$$\dot{\phi} = c_2 - \frac{\sin \phi}{L}$$

integrando se alcanza la expresión:

$$t_1 = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{d\phi}{c_2 - \frac{\sin \phi}{L}} \quad (25)$$

$$= \frac{\left[ -\ln \left( \frac{A \cos \phi + B(\sin \phi - 1)}{A \cos \phi - B(\sin \phi - 1)} \right) \right]_{\phi_0}^{\phi_f}}{A \cdot B}$$

donde:

$$A = \sqrt{\frac{1}{L} - c_2} ; \quad B = \sqrt{\frac{1}{L} + c_2} \quad (26)$$

Por lo que es posible expresar el valor de  $\phi$  en función de  $t$ :

$$\phi(t) = \mu(t, \phi_0)$$

$$= \text{asin} \left( \frac{B^2(\tau(t) + 1)^2 - A^2(\tau(t) - 1)^2}{B^2(\tau(t) + 1)^2 + A^2(\tau(t) - 1)^2} \right) \quad (27)$$

donde:

$$\tau(t) = e^{G_2 - (t \cdot A \cdot B)}$$

$$G_2 = \ln \left( \frac{A \cos \phi_0 + B(\sin \phi_0 - 1)}{A \cos \phi_0 - B(\sin \phi_0 - 1)} \right) \quad (28)$$

Para el vector  $\Omega_3$  se encuentran expresiones semejantes con sólo cambiar  $c_2$  por  $c_1$ .

A continuación se mostrará que para la expresión definida de la forma:

$$\Phi^{\phi^1}(p, t_1, t_3, t_4, t_5) = p \cdot e^{t_1 \Omega_\phi} e^{t_2 \Omega_1} e^{t_3 \Omega_4} e^{t_4 \Omega_1} \quad (29)$$

es posible encontrar  $(t_1, t_2, t_3, t_4)$ , tales que generan una maniobra restringida para  $\phi$  como variable dependiente.

Sean  $Y_1, Y_2, Y_3$  y  $Y_4$  la secuencia de trayectorias para la maniobra generada según (29), (ver fig. 4).

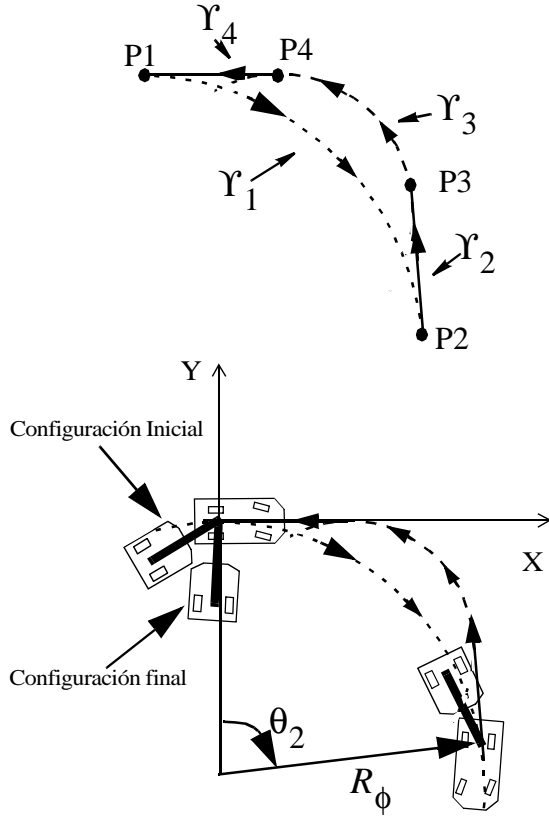


Fig.- 4: Maniobra restringida para la variable "phi".

Las variaciones de las variables de configuración a lo largo de ellas son:

**Trayectoria  $Y_1$ :**

$$[\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}]^T = \Omega_\phi = \left[ \cos \theta, \sin \theta, \frac{\sin \phi}{L}, 0 \right]^T$$

$$\Delta_1 x = R_\phi (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad ; \quad \Delta_1 y = -R_\phi (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

$$\Delta_1 \theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{R_\phi} t_1 \quad ; \quad \Delta_1 \phi = 0$$

**Trayectoria  $Y_2$ :**

$$[\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}]^T = \Omega_1 = \left[ \cos \theta, \sin \theta, 0, -\frac{\sin \phi}{L} \right]^T$$

$$\Delta_2 x = t_2 \cos \theta_2 \quad ; \quad \Delta_2 y = t_2 \sin \theta_2$$

$$\Delta_2 \theta = \theta_3 - \theta_2 = 0 \quad ; \quad \Delta_2 \phi = \xi(t_2, \phi_1) - \phi_1$$

**Trayectoria  $Y_3$ :**

$$[\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}]^T = \Omega_4 = \left[ \cos \theta, \sin \theta, c_2, c_2 - \frac{\sin \phi}{L} \right]^T$$

$$\Delta_3 x = R_2 (\sin \theta_4 - \sin \theta_3)$$

$$\Delta_3 y = -R_2 (\cos \theta_4 - \cos \theta_3)$$

$$\Delta_3 \theta = \theta_4 - \theta_3 = \frac{1}{R_2} t_3$$

$$\Delta_3 \phi = \mu(t_3, \phi_1 + \Delta_2 \phi) - (\phi_1 + \Delta_1 \phi)$$

**Trayectoria  $Y_4$ :**

$$[\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}]^T = \Omega_1 = \left[ \cos \theta, \sin \theta, 0, -\frac{\sin \phi}{L} \right]^T$$

$$\Delta_4 x = t_4 \cos \theta_4 \quad ; \quad \Delta_4 y = t_4 \sin \theta_4 \quad ; \quad \Delta_4 \theta = \theta_1 - \theta_4 = 0$$

$$\Delta_4 \phi = \xi(t_4, \phi_1 + \Delta_2 \phi + \Delta_3 \phi) - (\phi_1 + \Delta_2 \phi + \Delta_3 \phi)$$

Debido a la particularidad del sistema de referencia elegido (ver fig. 4), y a las condiciones de continuidad física y de trayectoria cerrada en B.S. [2]:

$$\Delta_T x = 0 \quad ; \quad \Delta_T y = 0 \quad ; \quad \Delta_T \theta = 0 \quad ; \quad \Delta_1 \theta = -\Delta_3 \theta \quad (30)$$

$$\theta_1 = \theta_4 = 0 \quad ; \quad \theta_2 = \theta_3 \quad ; \quad \frac{t_1}{R_\phi} = -\frac{t_3}{R_2} = \theta_2 \quad (31)$$

Por lo tanto, las ecuaciones que describen la maniobra completa pueden escribirse como:

$$\Delta x = 0 = (R_\phi - R_1) \sin \theta_2 + t_2 \cos \theta_2 + t_4$$

$$\Delta y = 0 = (R_2 - R_\phi) (\cos \theta_2 - 1) + t_2 \sin \theta_2 \quad (32)$$

$$\Delta_T \phi = \xi(t_4, \phi_1 + \Delta_2 \phi + \Delta_3 \phi) - \phi_1$$

De (32) pueden calcularse los valores que permiten que  $(t_1, t_2, t_3, t_4)$  y (29) definan una maniobra restringida para la variable  $\phi$ :

$$t_1 = \theta_2 R_\phi$$

$$t_2 = \frac{(R_\phi - R_2) (\cos \theta_2 - 1)}{\sin \theta_2} = (R_2 - R_\phi) \tan \frac{\theta_2}{2} \quad (33)$$

$$t_3 = -R_2 \theta_2$$

$$t_4 = t_2 = \theta_2 R_\phi$$

Con estos valores, el incremento de la variable dependiente es:

$$\Delta_T \phi = \xi(t_4(\theta_2), \phi_1 + \Delta_2 \phi + \Delta_3 \phi) - \phi_1 \quad (34)$$

donde:

$$\Delta_2 \phi = \xi(t_2(\theta_2), \phi_1) - \phi_1$$

$$\Delta_3 \phi = \mu(t_3(\theta_2), \phi_1 + \Delta_2 \phi) - \phi_1$$

La expresión (34) representa una ecuación no lineal que depende del valor  $\phi_1$  y del valor de  $\theta_2$ . Es decir, el incremento de la variable dependiente dependerá de su valor inicial y del ángulo que recorre el vehículo tractor durante la trayectoria  $Y_1$ . No es posible encontrar una expresión analítica que represente  $\theta_2$  en función del incremento deseado. No obstante, la función (34), es monótona y continua para valores del parámetro  $\theta_2$  perteneciente al intervalo  $(0, 0.5)$  y valores iniciales de  $\phi_1$  pertenecientes al intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ . En consecuencia, dada una condición inicial, es sencillo aplicar métodos numéricos para obtener el valor necesario de  $\theta_2$  para un incremento deseado en  $\phi$ .

De igual modo, la trayectoria cartesiana generada en esta maniobra puede recorrerse en sentido inverso. En este caso, la nueva maniobra definida se expresa según:

$$\Phi^{\varphi^2}(p, t_1, t_3, t_4, t_5) = p \cdot e^{-t_4\Omega_1} e^{-t_3\Omega_4} e^{-t_2\Omega_1} e^{-t_1\Omega_\varphi} \quad (35)$$

En ella los valores de los parámetros vienen definidos por las ecuaciones (33) y la secuencia de los vectores es la inversa de la definida para la maniobra anterior.

Las trayectorias seguidas por el vehículo tractor en el plano cartesiano son idénticas a las seguidas anteriormente, pero recorridas en sentido inverso. En este caso el incremento sufrido por la variable  $\varphi$  adquiere distinto signo al conseguido con la maniobra definida por (29).

En la fig. 5 se presentan los resultados, obtenidos mediante simulación, al realizar una maniobra del tipo presentado en un sistema donde el remolque es de gran dimensión (situación habitual en los vehículos conocidos como camiones). En la fig. 5-a) se muestran las trayectorias del sistema tractor y del remolque durante la maniobra. La fig. 5-b) presenta el desarrollo de la maniobra completa.

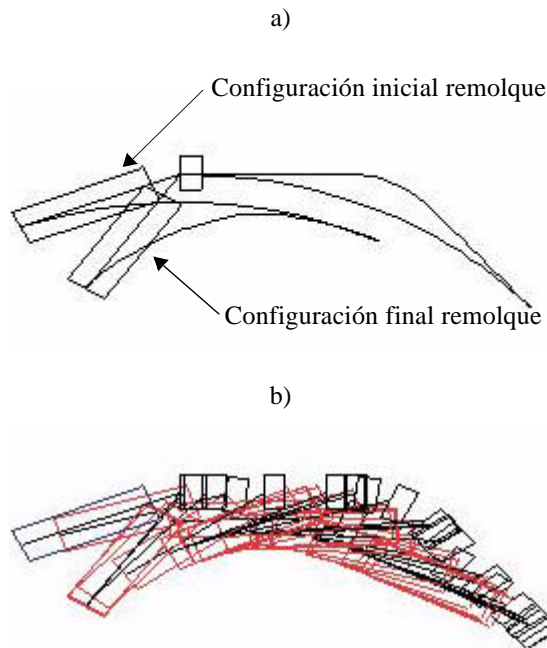


Fig.- 5: Maniobra restringida para la variable " $\varphi$ "

#### 4. CONCLUSIONES

En este artículo se ha propuesto la utilización del concepto de maniobra restringida para formalizar la generación de maniobras en sistemas no holónomos. El método puede ser aplicado a cualquier sistema que presente este tipo de restricciones.

Se ha particularizado la aplicación de dicha técnica a sistemas formados por un vehículo tractor y un vehículo remolque.

En este tipo de sistemas, es posible definir cuatro tipos de maniobras restringidas. Para las maniobras restringidas correspondientes a las variables  $x$ ,  $y$  ó  $\theta$  se propone utilizar los resultados obtenidos en trabajos anteriores para vehículos de cinemática similar a un automóvil más una maniobra para la reorientación del vehículo remolque.

Finalmente se ha presentado el diseño de una maniobra para cambiar el valor de la variable  $\varphi$ .

Los razonamientos utilizados se han justificado mediante resultados procedentes de simulaciones numéricas.

En futuros trabajos se abordará la aplicación de estas técnicas de planificación en sistemas tractor-remolque reales.

#### Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto CICYT TAP99-0926-C04-01.

#### 5. REFERENCIAS

- [1] Gómez-Bravo, F., A. Ollero (1995). "Dynamic path planning of free floating manipulator". *Proc. of the 1995 ICAR Conference*, Vol 1, pag 447-457.
- [2] Gómez-Bravo F. (2001). "Planificación de Maniobras de Sistemas Robóticos No Holónomos. Aplicación en Robots Móviles". Tesis Doctoral. Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla.
- [3] Gómez-Bravo F., F. Cuesta y A. Ollero. (2001). "Parallel and diagonal parking in nonholonomic autonomous vehicles". *Engineering Application of Artificial Intelligence* (Aceptado para publicación).
- [4] Latombe, J.C. (1991). "Robot motion Planning". Kluwer Academic Publishers.
- [5] Laumont, J.P., P.E. Jacobs, M. Taix and M. Murray (1994). "A Motion Planner for Nonholonomic Mobile Robots". *IEEE Trans. on Robotics and Autom.*, Vol 10, No 5: 577-593.
- [6] Lizarraga D., Morin, P. (1998) "Exponential stabilization of certain configuration of general N-Trailer system". *Proc. of the IFAC Workshop on Motion Control*, IMC98, pp.221-232.
- [7] Mukherjee, R., Anderson, D. (1993) "A Surface Integral Approach to the Motion Planning of Nonholonomic Systems". *Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, pp. 315-325.