

CAOS EN UN CIRCUITO NO AUTOOSCILANTE CON FORZAMIENTO PERIÓDICO

Miguel Ángel Fernández Granero.
Rafael González López.
Manuel Prian Rodríguez.
Eduardo Alejandro Romero Bruzón.
Juan Luis Rojas Ojeda

Grupo de Ingeniería de Sistemas y Automática.

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Tecnología Electrónica y Electrónica.
Escuela Superior de Ingeniería, Universidad de Cádiz, C/ Chile nº 1, 11002 Cádiz, gisa@uca.es

Resumen

En este trabajo se muestra el posible comportamiento caótico de un circuito no autooscilante con forzamiento periódico externo. Para ello se presentan los resultados obtenidos experimentalmente, sobre un circuito realizado físicamente y por simulación, obteniéndose retratos de fase en los que aparecen atractores presumiblemente caóticos determinados por los dos métodos. También se incluye un diagrama de bifurcaciones, calculado por simulación, que nos acerca un poco más a la anterior hipótesis.

Palabras clave: Oscilador no autónomo. Caos. Atractor. Bifurcación.

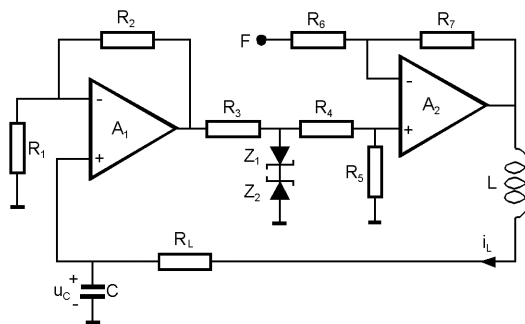


Figura 1: Circuito no autooscilante forzado. En F se aplica la señal de entrada periódica que hace funcionar al circuito.

1 SISTEMA AUTÓNOMO

El circuito que se propone [1, 2], representado en la figura 1, considerado como un sistema autónomo, tiene tres equilibrios, dos de los cuales son estables y existen

si la ganancia estática en bucle abierto es mayor que la unidad y un tercero, en el origen, es una ensilladura. Si dicha ganancia fuese menor que la unidad, el único equilibrio en el origen sería estable.

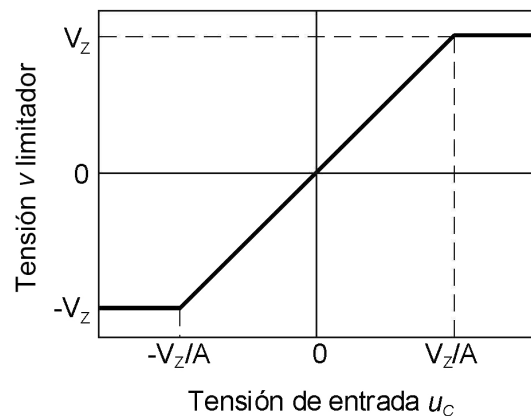


Figura 2: Representación de la función no lineal $v = v(u_c)$, que da la tensión existente en el limitador realizado con diodos zener.

Dada esta estructura, cuando funciona como sistema autónomo no es autooscilante al ser asintóticamente estable, por lo que necesita una señal forzante externa periódica para poder oscilar.

2 CIRCUITO EXPERIMENTAL

Para la realización física del circuito de la figura 1 hemos utilizado los siguientes componentes:

R_1	Potenciómetro de 200 K
R_2, R_4, R_5, R_6, R_7	Resistencias 100 K
R_3	Resistencia 1 K
R_L	Potenciómetro de 1 K
C	Condensador 100 nF
L	Autoinducción 100 mH
Z_1, Z_2	Diodos Zener de 4,7 V
A_1, A_2	Amplificadores Operacionales 741C

Los amplificadores operacionales A_1 y A_2 están alimentados a ± 15 V. A_2 está puesto como restador de ganancia unitaria, siendo sus dos entradas la señal forzante externa senoidal y la salida del limitador de tensión. La tensión de salida de A_2 se realimenta mediante una red pasiva RLC a la entrada no inversora de A_1 , que actúa como no inversor de ganancia:

$$A = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (1)$$

La no linealidad del circuito es debida al limitador de tensión conectado a la salida de A_1 , formado por la resistencia R_3 y los diodos zener Z_1 y Z_2 que se han elegido de 4,7 V. La tensión máxima de salida del limitador V_z es de 5,3 V, al sumar la tensión del diodo polarizado directo con el polarizado inversamente. En la figura 2 se muestra la relación entre la tensión u_c en el condensador C , de entrada al amplificador no inversor, y la tensión v a la salida del limitador, suponiendo que R_3 es suficientemente pequeña.

La razón de realizar la no linealidad con un limitador diódico, en lugar de dejar que la produzca la saturación de A_1 , es impedir que el amplificador A_2 pueda saturarse, para lo cual también se ha limitado la amplitud de la señal a aplicar en la entrada F , que se resta de la tensión del limitador. Si en algún momento llegara a saturarse A_1 , no causaría alteraciones en el funcionamiento del circuito, debido a que su tensión de saturación es bastante superior a la del limitador.

La figura 3 ha sido obtenida digitalmente mediante un ordenador dotado de tarjeta de adquisición de datos, a dos de cuyas entradas hemos aplicado la tensión u_c y, mediante un restador cuyas dos entradas se han conectado a los extremos de R_L , una tensión proporcional a i_L . En el acoplamiento se han utilizado también dos amplificadores separadores para evitar influencias externas sobre el circuito y se han adecuado las tensiones a los niveles apropiados para las entradas de la tarjeta.

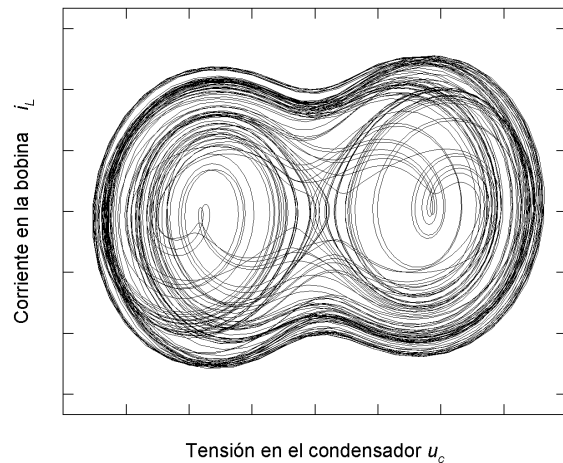


Figura 3: Retrato de fase obtenido mediante captura digital sobre el circuito realizado. En el eje horizontal tenemos la tensión en el condensador u_c y en el eje vertical una tensión proporcional a la corriente en la bobina, i_L .

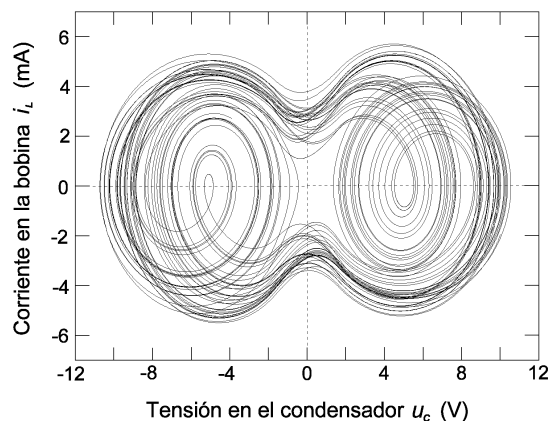


Figura 4: Supuesto atractor caótico del circuito propuesto obtenido por simulación. Los valores de los parámetros empleados han sido: $R_L = 0,3$ K, $A = 3,25$ y tensión de saturación de 5,3 V. Forzante de 1.200 Hz y amplitud de 2 V_p.

Dicha figura muestra un retrato de fase de un atractor, aparentemente caótico, en el que en el eje horizontal se tiene la tensión u_c en el condensador C y el eje vertical una corriente proporcional a la corriente i_L de la autoinducción L .

Los valores de los parámetros empleados han sido: $R_L = 0,3$ K, $A = 3,25$. La señal senoidal es de 1.200 Hz y amplitud de 2 V_p.

3 MODELADO Y SIMULACIÓN

Tomando como variables de estado la tensión u_c en el condensador y la corriente i_L en la bobina, se puede describir el circuito por dos ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= v(u_c) - b \operatorname{sen}(\omega t) - R_L i_L - u_c \\ C \frac{du_c}{dt} &= i_L \end{aligned} \quad (2)$$

La función $v = v(u_c)$ representa la relación no lineal que se muestra en la figura 2, que puede estar dada por la expresión [3]:

$$v(u_c) = \frac{A}{2} \left(\left| u_c + \frac{V_Z}{A} \right| - \left| u_c - \frac{V_Z}{A} \right| \right) \quad (3)$$

La señal periódica $b \operatorname{sen}(\omega t)$ es la señal forzante externa aplicada en F . Si la amplitud de dicha señal fuese nula el sistema evolucionaría asintóticamente hacia uno de los dos equilibrios estables, de acuerdo con lo comentado en el apartado 1.

La figura 4 muestra un retrato de fase obtenido por simulación a partir del modelo matemático, para lo cual se ha utilizado un método de integración por tramos lineales [4] consistente en la determinación simbólica de la solución de las ecuaciones de estado para cada uno de dichos tramos de la función $v(u_c)$, tomando como condición inicial, al pasar de un tramo a otro, el valor de las variables de estado en el último punto del tramo anterior, previamente calculado.

Los valores de los parámetros para obtener dicho gráfico han sido los mismos indicados en el apartado anterior.

Nótese la similitud con el retrato de fase capturado digitalmente a partir del circuito realizado, que aparece en la figura 3.

La figura 5, obtenida por simulación de acuerdo con el método anteriormente reseñado, muestra un diagrama de bifurcaciones, en el cual, en el eje vertical tenemos el valor de la corriente en la bobina i_L en una sección de Poincaré con el plano $u_c = V_Z/A$. En el eje horizontal se han tomado diferentes valores del potenciómetro R_L . En este gráfico se puede observar la zona de desdoblamiento periódico a la derecha y la zona de

comportamiento supuestamente caótico a la izquierda, dentro de la cual se pueden apreciar algunas ventanas periódicas.

Con excepción de R_L , los restantes parámetros toman los valores ya mencionados.

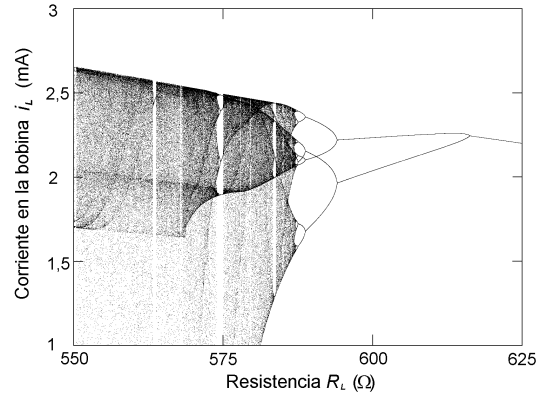


Figura 5: Diagrama de bifurcaciones obtenido mediante simulación. En el eje de abscisas se toman diferentes valores la resistencia variable R_L , y en el eje de ordenadas el valor de la corriente en la bobina i_L en una sección de Poincaré con el plano $u_c = V_Z/A$.

4 CONCLUSIONES

Ese circuito presenta una gran variedad de comportamientos, ya que aparecen diversos atractores, aparentemente caóticos, y otros atractores periódicos de formas complejas y diversos órdenes de periodicidad, al dar distintos valores a los parámetros, los cuales no se han incluido en este trabajo.

Se puede suponer una aceptable aproximación del modelo matemático utilizado para obtener los resultados por medio de la simulación, la cual podemos apreciar comparando los retratos de fase obtenidos por los dos métodos representados en las figuras 3 y 4.

Podemos afirmar que el circuito tiene comportamiento caótico, ya que además de los retratos de fase y el diagrama de bifurcaciones aquí presentados, de presumible aspecto caótico, también se han comprobado los exponentes de Lyapunov [5], confirmando lo anteriormente expuesto.

Referencias

- [1] González López, R.; Prian, M.; Sánchez, M., *Criptografía. Diseño de Un Sistema Basado en Caos*, Mundo Electrónico, 262, pp. 60-64 (1995)
- [2] Franco, E.; González López, R.; Prian, M.; Romero, E. A.; Fernández, M. A., *Sincronización Múltiple de Osciladores no Autónomos*, actas de las IV Jornadas en Tecnologías de la Información, pp 81-87, Cádiz, (2000).
- [3] González López, R.; Prian, M.; Romero, E. A.; Sánchez, V. M.; Fernández, M. A.; Rojas, J. L.; Sánchez, M., *Una Función Dervivable para el Modelado de Amplificadores Electrónicos*, actas de las XXI Jornadas de Automática en CD-ROM, ISBM 84-699-3163-6, Sevilla, (2000).
- [4] González López, R.; Prian, M.; Romero, E. A.; Fernández, M. A.; Sánchez, V. M.; Rojas, J. L.; Sánchez, M., *Un Método de Integración por Tramos Lineales para el Análisis de Circuitos Electrónicos*, actas de las IV Jornadas en Tecnologías de la Información, pp 95-102, Cádiz, (2000).
- [5] Thompson, J. M. T.; Stewart, H. B., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Wiley & Sons, Chichester, (1991).