

# CAOS EN UN OSCILADOR ARMÓNICO CON FORZAMIENTO PERIÓDICO

David Luque Sacaluga  
 Manuel Prian Rodríguez  
 Rafael González López  
 Miguel Ángel Fernández Granero  
 Eduardo Alejandro. Romero Bruzón  
 Juan Luis Rojas Ojeda

Grupo de Ingeniería de Sistemas y Automática.

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Tecnología Electrónica y Electrónica.  
 Escuela Superior de Ingeniería, Universidad de Cádiz, C/Chile, nº1, 11002 Cádiz, gisa@uca.es

## Resumen

*En este trabajo se presenta un sistema no lineal de segundo orden con forzamiento periódico, susceptible de presentar comportamiento caótico. Se muestra un atractor extraño obtenido experimentalmente mediante un prototipo, se establece un modelo matemático y se dan algunos resultados de simulación, retrato de fase y diagrama de bifurcaciones.*

**Palabras Clave:** Sistema Dinámico. Oscilador. Caos. Atractor. Bifurcación.

## 1 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El conocido oscilador armónico dado por la ecuación:

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \quad (1)$$

que también puede ponerse en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha_1 y \\ \dot{y} &= \alpha_2 x \\ \omega^2 &= \alpha_1 \alpha_2 > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

es fácilmente realizable utilizando dos integradores operacionales y se puede considerar lineal en una primera aproximación si no se producen saturaciones en los amplificadores operacionales utilizados. Como es sabido, este circuito no es útil como oscilador, pues, al presentar un centro, la amplitud de las oscilaciones depende de las condiciones iniciales y no existe ningún mecanismo que estabilice dicha amplitud.

Si, partiendo de dicho circuito, se establece una realimentación mediante un bloque que produzca una saturación que limite la excursión de la señal y se aplica una entrada senoidal, como puede apreciarse en el diagrama de bloques de la figura 1, tenemos un sistema no lineal [1] susceptible de presentar comportamiento caótico. Este sistema puede describirse mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha_1 y + \varepsilon_1 v(y) + \alpha_3 f(t) \\ \dot{y} &= \alpha_2 x - \varepsilon_2 v(y) \end{aligned} \quad (3)$$

En la cual la entrada  $f(t)$  está dada por la función senoidal:

$$f(t) = b \sin(\omega t) \quad (4)$$

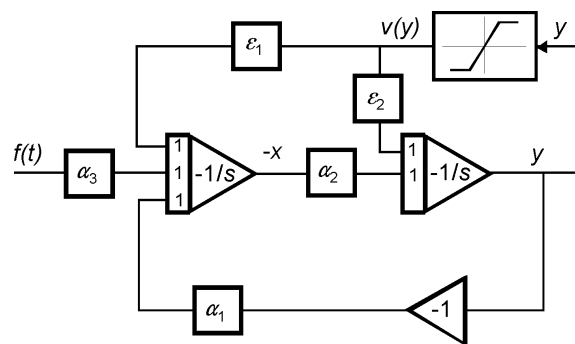


Figura 1: Diagrama de bloques del sistema realizado con dos integradores y amplificadores aproximadamente lineales, realimentado mediante un bloque no lineal.

La función no lineal  $v(y)$  [2], representada en la figura 2, se puede modelar mediante tres tramos lineales de acuerdo con la expresión:

$$v(y) = \frac{A}{2} \left( \left| y + \frac{V_s}{A} \right| - \left| y - \frac{V_s}{A} \right| \right) \quad (5)$$

donde  $A$  es la ganancia de un amplificador en su zona lineal y  $\pm V_s$  la tensión de saturación del mismo, suponiendo iguales en valor absoluto los valores de dicha tensión positiva y negativa.

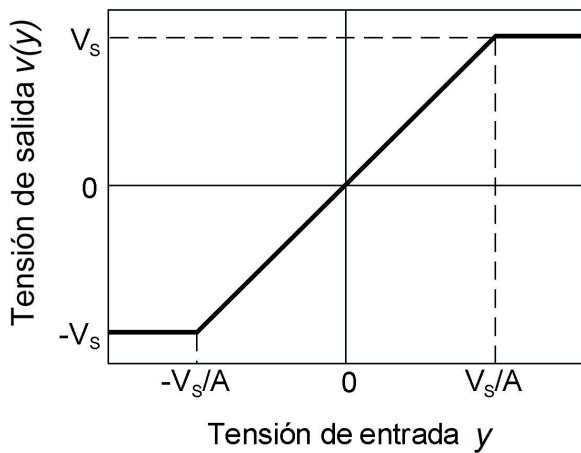


Figura 2: Función no lineal del bloque de realimentación de la figura 1.

## 2 SISTEMA EXPERIMENTAL

Para la realización del sistema se han utilizado amplificadores operacionales  $\mu A741C$ , excepto en los integradores en los que se han empleado TL071, de menor deriva. Dichos amplificadores se han alimentado a  $\pm 15$  V.

El sistema, como puede apreciarse en la figura 1, consta de dos integradores-sumadores-inversores y un inversor en los que se ha procurado un funcionamiento lo más lineal posible [3].

La no linealidad del sistema se ha realizado mediante un amplificador no inversor de ganancia 9,5 cuya amplitud se ha limitado utilizando dos diodos zener de 2,7 V conectados en serie y en oposición, con lo que se obtiene una tensión de saturación para este bloque de  $\pm 3,3$  V.

El parámetro  $\beta$ , producto del correspondiente coeficiente de entrada al integrador  $\alpha_3$  por la máxima amplitud de la señal senoidal  $b$ , se ha fijado en 3.900  $V_p/s$  y frecuencia en 150 Hz. Para ajustar los distintos parámetros del circuito se han utilizado potenciómetros.

En la tabla 1 aparece un resumen de los valores en que se han fijado los distintos parámetros del circuito.

Parámetro	Valor	Unidad
$\alpha_1$	10.400	$s^{-1}$
$\alpha_2$	6.850	$s^{-1}$
$\epsilon_1$	2.500	$s^{-1}$
$\epsilon_2$	1.200	$s^{-1}$
$\omega$	942,5	$s^{-1}$
$\beta$	3.900	$V_p/s$
$V_s$	3,3	V
$A$	9,5	-

Tabla 1: Valores de los parámetros utilizados en la realización del circuito

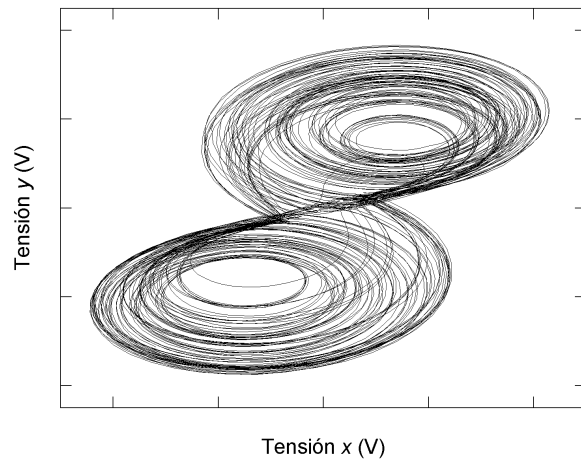


Figura 3: Retrato de Fase obtenido mediante captura digital de las tensiones en las salidas  $x$  e  $y$  de los integradores del prototipo de circuito realizado.

Utilizando los valores de los parámetros indicados, se ha obtenido el retrato de fase que se muestra en la figura 3. Dicho retrato de fase se ha capturado digitalmente mediante un ordenador dotado de tarjeta de adquisición de datos, conectando dos de sus canales a las salidas  $x$  e  $y$  de los dos integradores, las cuales se han atenuado previamente. También se ha comprobado, mediante medición con osciloscopio, que ningún amplificador, a excepción de los del bloque no lineal, está en saturación.

A la vista de la mencionada figura 3, puede deducirse que existen claros indicios de que el retrato de fase capturado corresponde a un atractor caótico.

### 3 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

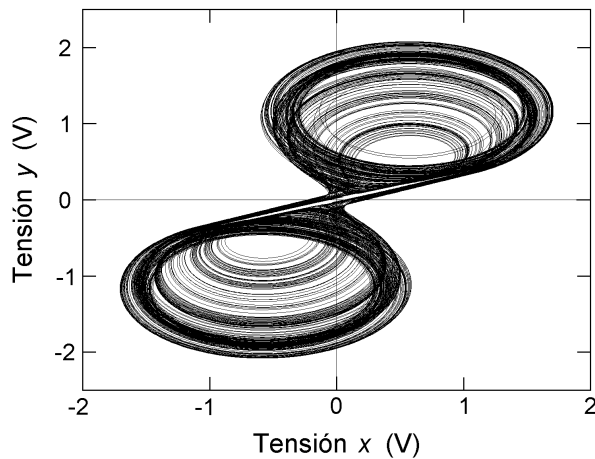


Figura 4: Retrato de fase obtenido por integración numérica de las ecuaciones (2) para los valores de los parámetros dados en la tabla 1 y senoide de 180 Hz.

Mediante integración numérica de la ecuación (3), utilizando la entrada dada por la expresión (4) y aplicado la función no lineal (5), que se muestra en la figura 2, y utilizando los mismos parámetros mencionados en el apartado anterior (tabla 1), a excepción de la frecuencia de la señal senoidal, que en este caso se ha fijado en 180 Hz ( $\omega = 1131 \text{ s}^{-1}$ ), se ha obtenido el retrato de fase de la figura 4, en cuyas abscisa y ordenada se han tomado los valores de las variables de estado  $x$  e  $y$ .

El aspecto caótico del retrato de fase obtenido mediante simulación se ha corroborado mediante los exponentes de Lyapunov [4].

En la figura 5 se muestra un diagrama de bifurcaciones obtenido por simulación, el cual se ha realizado haciendo variar el parámetro  $\beta$ , máxima

amplitud de la señal senoidal utilizada multiplicada por el coeficiente de entrada al integrador, desde 3.000 a 5.000 y calculando la variable  $x$  en una sección de Poincaré con el plano  $y = 0$  al ser  $y$  decreciente. Los valores de los restantes parámetros son los indicados en la tabla 1 a excepción de la frecuencia de la senoide, que se ha tomado, como ya se indicó anteriormente, de 180 Hz ( $\omega = 1131 \text{ s}^{-1}$ ).

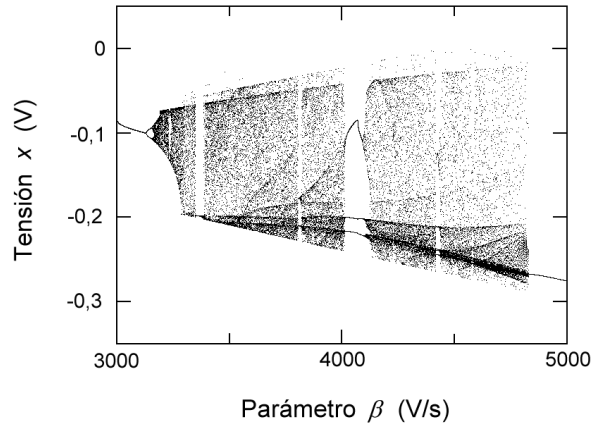


Figura 5: Diagrama de bifurcaciones obtenido mediante simulación, haciendo variar el parámetro  $\beta$  (abscisas) y calculando la variable  $x$  en una sección de Poincaré con el plano  $y=0$  al decrecer  $y$ .

### 4 CONCLUSIONES

El oscilador armónico con forzamiento exterior periódico y realimentación no lineal, presentado en este trabajo, tiene claros indicios de comportamiento caótico, como puede deducirse de los retratos de fase mostrados, obtenidos directamente del circuito realizado y por simulación, y del diagrama de bifurcaciones resultante. La existencia de un atractor caótico se ha corroborado mediante los exponentes de Lyapunov.

El comportamiento de este sistema es complejo, pudiendo existir, además de atractores caóticos de distintas morfologías, otras órbitas estables periódicas, algunas de gran complejidad y alto orden de periodicidad, como puede deducirse de los resultados experimentales realizados sobre el prototipo implementado y simulación, no incluidos en este trabajo. También se han podido obtener diversos atractores toroidales.

De lo anteriormente expuesto, podemos deducir que este circuito es susceptible de resultar interesante para futuros estudios en mayor profundidad.

## Referencias

- [1] Prian, M.; González López, R.; Sánchez, V. M.; Romero, E. A.; Fernández, M. A.; Sánchez, J. M.; Rojas, J. L.; *Sincronización por Pulsos en Sistema Caótico de Segundo Orden Forzado*, actas de las IV Jornadas Científicas en Tecnologías de la información, pp. 88-94, Cádiz, (2000).
- [2] González López, R.; Prian, M.; Romero, E. A.; Sánchez, V. M.; Fernández, M. A.; Rojas, J. L.; Sánchez, M., *Una Función Dervivable para el Modelado de Amplificadores Electrónicos*, actas de las XXI Jornadas de Automática, CD-ROM ISBN 84-699-3163-6, Sevilla, (2000).
- [3] J. Millman y A. Grabel, *Microelectrónica*, Hispano Europea, Barcelona, (1993).
- [4] J. M. T. Thompson; H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, J. Wiley & Sons, Chichester, (1991).