

ANÁLISIS DE OSCILACIONES REGULARES Y CAÓTICAS DE UN SERVOMOTOR CONTROLADO POR RELÉ CON EL MÉTODO DE LAS TRANSFORMACIONES PUNTUALES

Manuel Pérez Polo y José Ángel Berná Galiano

Departamento de Física Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal. Universidad de Alicante. Escuela Politécnica Superior. Apartado 99, E-030080 Alicante. E-mail: manolo@disc.ua.es, jberna@disc.ua.es

Resumen

En este trabajo se analiza el régimen oscilatorio de un servomotor con una función transferencia de segundo orden y controlado por un relé con histéresis que se modela con una característica no lineal y no unívoca. Utilizando el método de las transformaciones puntuales asociadas al espacio de fase, se investiga de forma analítica y numérica la posibilidad de la aparición de oscilaciones ante una entrada en escalón, y bajo qué condiciones es posible reducirlas con realimentación de posición y velocidad. En el caso de que el sistema funcione como regulador, se demuestra que es posible obtener un comportamiento oscilatorio caótico en el eje del servomotor, dando lugar a la aparición de una familia de atractores extraños. La aleatoriedad del sistema se investiga a través de la respuesta temporal y el análisis de la dependencia sensible.

Palabras clave: Servomotor, relé, oscilación, regular, caótica, atractor.

1 INTRODUCCIÓN

Un servomotor controlado por relé es un sistema de control en lazo cerrado que utiliza un relé como amplificador de potencia y de control. Normalmente se considera al relé como un elemento no lineal que puede tomar tres valores de salida, dependiendo del valor de la señal de entrada. Este tipo de control, llamado de contacto, es muy utilizado en aplicaciones que requieren poco espacio y limitación de peso, sobre todo al compararlo con otros diseños que utilizan amplificadores de potencia junto con el elemento de regulación asociado.

En este trabajo se estudia un servomotor controlado por relé con histéresis, en el que la salida puede tomar dos posiciones en función de la entrada, dando lugar a lo que se conoce como control todo o nada (control bang-bang) [2]. A pesar de las ventajas de este tipo de control,

también tiene inconvenientes, derivados del carácter no lineal del relé. En efecto, es bien conocido [2] que este tipo de control puede dar lugar a auto oscilaciones del eje de salida del servomotor, las cuales pueden reducirse con una realimentación de velocidad y/o de posición.

El análisis de estos sistemas, conocidos como lineales a trozos, puede realizarse plenamente en el plano de fases, para investigar la posibilidad de encontrar ciclos límites. Sin embargo, desde el célebre trabajo de Andronov [1], cuyo precursor fue Poincaré [5], el método de las transformaciones puntuales, ha demostrado ser muy útil para detectar la presencia de ciclos límite, y poder concluir si son estables o inestables.

En este trabajo se extiende la aplicabilidad del método de las transformaciones puntuales, para estudiar el comportamiento regular y caótico de un servomotor cuando se introduce una realimentación adecuada en el lazo de control del mismo. Este estudio se realiza a partir de las ecuaciones del servomotor, definidas para cada una de las zonas del espacio de fases, en que el relé divide a las ecuaciones del sistema.

Con realimentación positiva, se demuestra que la transformación puntual puede tener infinitas ramas, tal que los puntos de equilibrio asociados con cada rama son inestables. Se obtiene así un sistema acotado, pero cuya salida, asociada a los puntos inestables, tiene un comportamiento caracterizado por oscilaciones caóticas del eje del motor. La presencia de una familia de atractores extraños se comprueba a partir del cálculo de la respuesta del sistema y del estudio de la dependencia sensible a partir de dos condiciones iniciales muy próximas [3],[4], [6].

2 OSCILACIONES REGULARES DEL SERVOMOTOR

La función transferencia del servomotor se considera de segundo orden, con ganancia K_m y constante de tiempo τ_m .

En la figura 1 se indican las estructuras de control que se van a considerar a continuación.

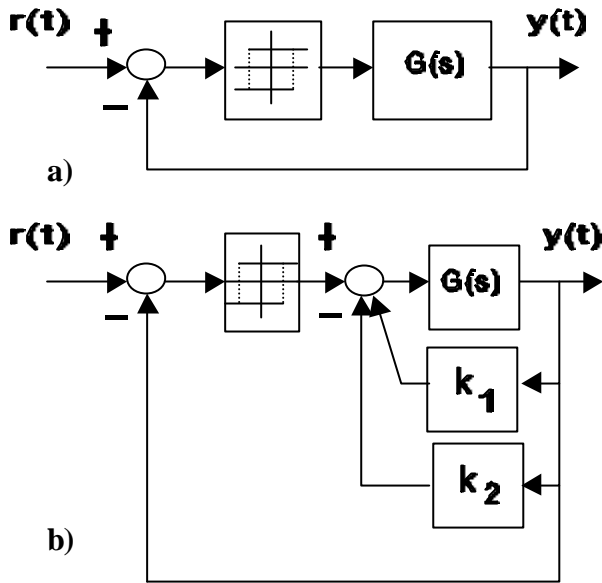


Figura 1. a) Control con relé. b) Control con relé y realimentación de posición y velocidad

El caso indicado en la figura b) se reduce al de la a) tomando $K_1 = K_2 = 0$. En la figura 2 se muestra la característica no unívoca del relé con histéresis.

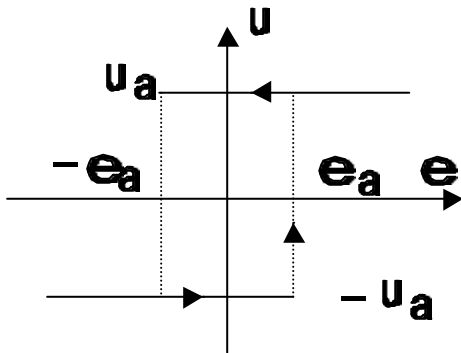


Figura 2. Relé de dos posiciones con histéresis

La ecuación de definición de la característica no unívoca del relé viene dada por la ecuación:

$$u(e) = \begin{cases} u_a & \text{para } e > -e_a \\ -u_a & \text{para } e < e_a \end{cases} \quad (1)$$

A continuación se introducen las ideas básicas del método de las transformaciones puntuales que se van a utilizar en el trabajo. Supóngase una trayectoria en el espacio de fases cortada

por un segmento arbitrario AB en los puntos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_e$ tal como se muestra en la figura 3.

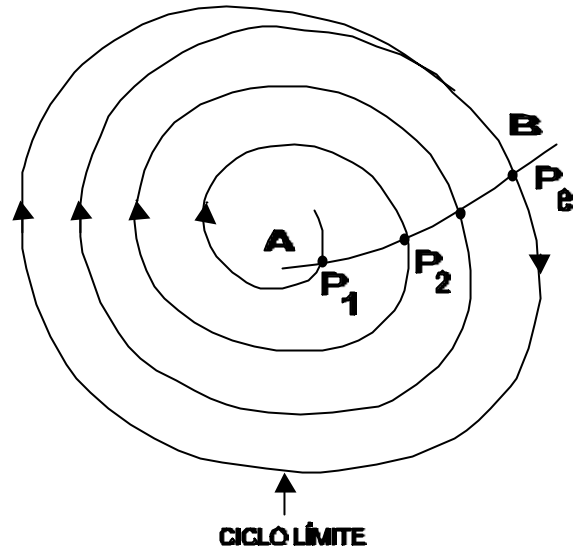


Figura 3. Transformaciones puntuales hasta alcanzar el ciclo límite.

Es fácil comprobar que el punto P_1 se obtiene como resultado del movimiento de P_0 a través de la trayectoria de fase hasta alcanzar el segmento AB. La transformación puntual asociada a la curva genérica AB es un operador T que transforma el punto P_0 en el punto P_1 , o sea:

$$P_1 = T(P_0) \quad (2)$$

Para el punto P_e que pertenece al ciclo límite, la transformación puntual transforma dicho punto en si mismo: $P_e = T(P_e)$. La transformación puntual se puede representar en forma de función utilizando una coordenada arbitraria para los puntos P_0, P_1, \dots, P_e , a lo largo de la curva AB. Por ejemplo las longitudes: $l_0 = AP_0, l_1 = AP_1, \dots$, de forma que la transformación puntual se pueda expresar como:

$$l_1 = T(l_0) \quad (3)$$

pudiéndose considerar el conjunto de valores l_0, l_1, l_2, \dots , y sus transformados $T(l_0), T(l_1), T(l_2), \dots$, de la forma

$$p = \{l_0, l_1, l_2, \dots, l_i, \dots\} \\ q = \{T(l_0), T(l_1), T(l_2), \dots, T(l_i), \dots\} \quad (4)$$

Si se representan los puntos "q" frente a los "p" se obtiene una gráfica de la transformación puntual definida por la ecuación:

$$l_{i+1} = T(l_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

En el ciclo límite se verifica $i_i=T(i_i)$, y tal punto se obtiene de la intersección de la recta “ $q=p$ ” con la curva de transformación. La estabilidad del ciclo límite se puede determinar a partir de la pendiente de la curva de transformación en el punto de equilibrio P_e de la figura 3. En la figura 4 se indica de forma esquemática de operar .

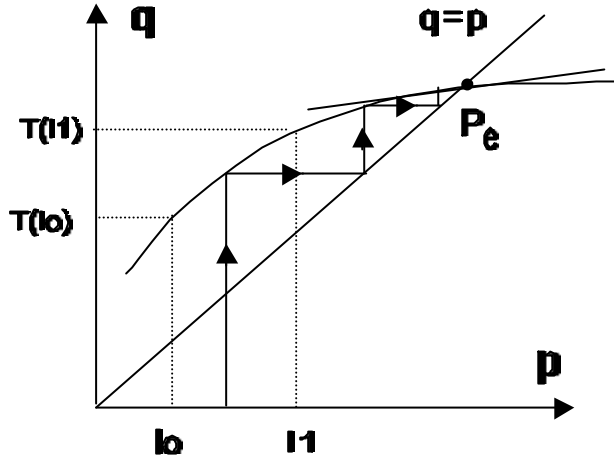


Figura 4. Representación gráfica de la transformación puntual.

El punto de equilibrio P_e corresponde a un ciclo límite estable, ya que la pendiente de la curva en dicho punto es menor que la unidad. Lo contrario sucede cuando la pendiente es mayor que la unidad. La argumentación se basa en las ecuaciones siguientes:

$$\frac{dq}{dp} = \Phi'(p) \Rightarrow \Delta q = \Phi'(p) \cdot \Delta p \quad (6)$$

Si la derivada $|dq/dp| < 1$ entonces $\Delta q < \Delta p$, y al aumentar Δp , Δq es siempre menor que Δp , de forma que para $q=p$ se alcanza un estado de equilibrio estable.

Para determinar la transformación puntual del servomotor es necesario determinar las ecuaciones del sistema en las dos zonas en que queda dividido el espacio de fases, en función de los valores que toma la señal de salida del relé $u(e)$, de acuerdo con la figura 2 y la ecuación (1). Se van a considerar dos casos, sin realimentación de posición y velocidad, y con realimentación de ambas.

2.1 SIN REALIMENTACIÓN DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Este caso corresponde al sistema mostrado en la figura 1 a. La ecuación diferencial de la salida viene dada por:

$$\tau_m \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = K_m \cdot u(e) \quad (7)$$

siendo “ e ” la señal de error. Suponiendo que la señal de entrada es un escalón unitario, se verifica:

$$\frac{de(t)}{dt} = -\frac{dy(t)}{dt}; \quad \frac{d^2 e(t)}{dt^2} = -\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \quad (8)$$

de forma que la ecuación (6) se puede escribir como:

$$\tau_m \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} = -K_m \cdot u(e) \quad (9)$$

la ecuación (9) se puede expresar en forma adimensional introduciendo la variable:

$$\tau = \frac{t}{\tau_m}; \Rightarrow t = \tau \cdot \tau_m \quad (10)$$

con lo cual la ecuación (9) se reduce a:

$$\frac{1}{\tau_m K_m u_a} \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{1}{\tau_m K_m u_a} \frac{de}{dt} = -\frac{u(e)}{u_a} \quad (11)$$

Introduciendo las variables de estado:

$$x_1 = \frac{e}{\tau_m K_m u_a}; \quad x_2 = \frac{dx_1}{d\tau}; \quad u_1(x_1) = \frac{u(e)}{u_a} \quad (12)$$

la ecuación (11) se transforma en:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -u_1(x_1) - x_2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$u_1(x_1) = \begin{cases} +1 & \text{para } x_1 > -\varepsilon \\ -1 & \text{para } x_1 < +\varepsilon \end{cases} \quad (14)$$

$$\varepsilon = \frac{e_a}{\tau_m K_m u_a} \quad (15)$$

La no linealidad se ha transformado de acuerdo con las ecuaciones (13), (14) y (15). Para los valores de $x_1 = \pm\varepsilon$ se produce un salto de u_1 , y por tanto las ecuaciones de estado (13) se desdoblán en dos, cada una de las cuales define una zona del plano de fases, separadas por lo que se conoce como línea de conmutación [1], tal como se muestra en la figura 5. Es importante tener en cuenta que las zonas a y b se superponen para valores de x_1 comprendidos entre $\pm\varepsilon$, como corresponde a la característica no unívoca del relé con histéresis. Para cada una de las zonas a y b se verifican las ecuaciones:

$$\text{zona a} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -1 - x_2 \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{zona b} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 - x_2 \end{cases} \quad (17)$$

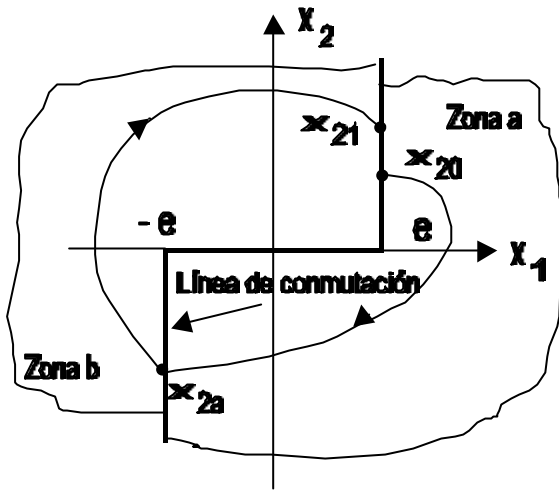


Figura 5. Línea de conmutación y transformaciones puntuales.

La solución sucesiva de las ecuaciones (16) y (17) determina las trayectorias en el espacio de fases. Para determinar la transformación puntual se considera que el sistema está inicialmente en el punto (ϵ, x_{20}) , de forma que dicho punto se mueve en la zona a hasta alcanzar el punto $(-\epsilon, x_{2a})$ de la línea de conmutación, para moverse en la zona b hasta alcanzar el punto (ϵ, x_{21}) . Esta transformación puntual se compone de dos:

$$x_{2a} = T_a(x_{20}) ; x_{21} = T_b(x_{2a}) \quad (18)$$

de forma que la transformación puntual total viene dada por:

$$x_{21} = T_b[T_a(x_{20})] \quad (19)$$

tal como se indica en la figura 5.

Integrando las ecuaciones (16) con la condición inicial (ϵ, x_{20}) se obtiene:

$$x_1(\tau) = (1 + x_{20}) \cdot (1 - e^{-\tau}) - \tau + \epsilon \quad (20)$$

$$x_2(\tau) = (1 + x_{20}) \cdot e^{-\tau} - 1$$

El tiempo τ_a en el que el punto inicial se mueve por la zona a será:

$$\tau_a = \ln \frac{1 + x_{20}}{1 - x_{20}} \quad (21)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en las (20), se obtiene la transformación puntual en la zona a para el servomotor considerado en la figura 1a:

$$\ln \frac{1 + x_{20}}{1 + x_{2a}} = 2\epsilon + x_{20} + x_{2a} \quad (22)$$

De la ecuación 22 se deduce que en este caso no es posible obtener una ecuación explícita que determine x_{2a} en función de x_{20} . De forma similar se puede construir la transformación T_b

para la zona b, sin embargo, dada la similitud de las ecuaciones (16) y (17), solo es necesario la transformación T_a para analizar el comportamiento del sistema. En efecto, a partir de la ecuación (22) se puede calcular la pendiente de la ecuación (22) para $x_{2a} = x_{20}$, para lo cual considerando dicha ecuación de la forma $F(x_{2a}, x_{20}) = 0$, se obtiene:

$$\left(\frac{dx_{2a}}{dx_{20}} \right)_{x_{2a}=x_{20}} = - \frac{\partial F / \partial x_{20}}{\partial F / \partial x_{2a}} = \frac{1 - x_{20}}{1 + x_{20}} \quad (23)$$

Por consiguiente si el valor absoluto de la expresión $(1-x_{20})/(1+x_{20}) < 1$ la pendiente de la curva que define la transformación puntual será menor que la unidad, y se obtendrá un ciclo límite estable. Se llega a la conclusión de que el sistema controlado con relé auto oscilará de forma estable o inestable dependiendo del estado inicial del sistema. La figura 6 muestra los resultados obtenidos para $0 < x_{20} < 1$.

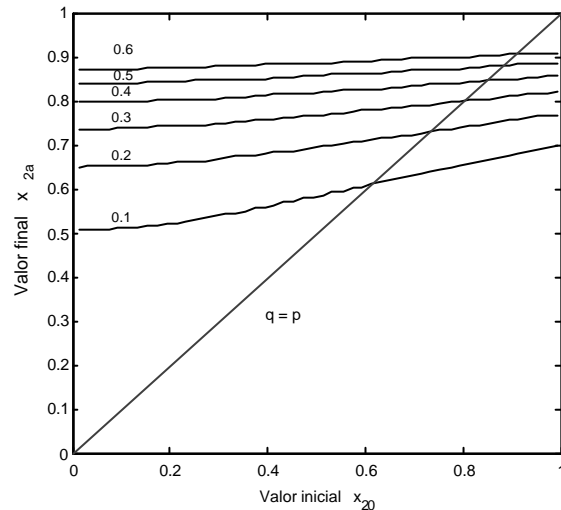


Figura 6. Transformación puntual T_a para valores de $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$

En la figura 7 se muestra la salida del sistema ante una entrada en escalón unitario. Se observa que contra más grande es el valor del parámetro ϵ , menos oscilante es la respuesta del sistema, con un transitorio más rápido. Este resultado se puede anticipar a partir de la figura 6, ya que para valores mayores de ϵ , menor es la pendiente de la curva T_a que define la transformación puntual en el punto de equilibrio, y por tanto antes se alcanza el estado estacionario.

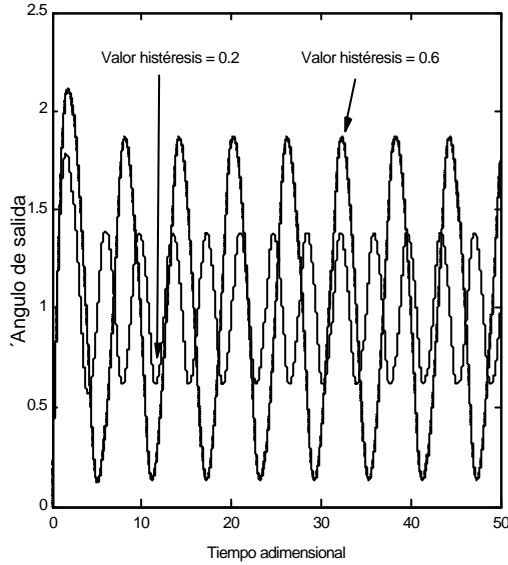


Figura 7. Respuesta auto oscilante ante una entrada en escalón unitario para $\varepsilon = 0.2, 0.6$

2.2 CON REALIMENTACIÓN DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Este caso corresponde al sistema mostrado en la figura 1 b. La ecuación diferencial de la salida viene dada por:

$$\tau_m \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = K_m \cdot u(e) - K_1 K_m \frac{dy}{dt} - K_2 K_m y \quad (24)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (10), (11), (12) y (14) del apartado anterior, se obtiene la ecuación del sistema equivalente a la (11):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 e_1}{d\tau^2} + (1 + K_1 K_m) \frac{de_1}{d\tau} + K_2 K_m \tau_m e_1 &= \\ = \frac{K_2}{\tau_m} r - \frac{u(e_1)}{u_a}; \quad e_1 &= \frac{e}{K_m \tau_m u_a} \end{aligned} \quad (25)$$

La ecuación (25) se escribe con las nuevas variables de la forma:

$$\frac{d^2 e_1}{d\tau^2} + 2\zeta\omega_n \frac{de_1}{d\tau} + \omega_n^2 e_1 = K \quad (26)$$

siendo:

$$1 + K_1 K_m = 2\zeta\omega_n; \quad K_2 K_m \tau_m = \omega_n^2 \quad (27)$$

$$K = \frac{K_2}{u_a} r - 1 \quad (28)$$

Para resolver la ecuación (26) en la zona a y determinar el tiempo de vuelo τ_a es necesario

especificar las condiciones iniciales y las características del relé y del motor, de acuerdo con la figura 5. La forma de operar sería:

- Fijar los valores de u_a , e_a , K_m , τ_m de donde se obtiene ε de acuerdo con la ecuación (15).
- Fijando ζ y ω_n de las ecuaciones (27) se determinan a constante de realimentación de velocidad y de posición K_1 y K_2 respectivamente.

Según los valores de ζ y ω_n se pueden dar fundamentalmente dos casos:

2.2.1 Raíces complejas conjugadas

En este caso se deben de verificar las siguientes relaciones:

$$0 < \zeta < 1; \quad 2\zeta\omega_n > 1 \Rightarrow \zeta > \frac{1}{2\omega_n} \quad (29)$$

$$\frac{1}{2\omega_n} < \zeta < 1 \Rightarrow \omega_n > 0.5 \quad (30)$$

De las ecuaciones (29) y (30) se deduce que contra mayor sea ω_n menor podrá ser ζ . La solución general de la ecuación (26) viene dada por:

$$\begin{aligned} e_1(\tau) &= \frac{K}{\omega_n^2} + e^{-\sigma\tau} (A \cos \omega_d \tau + B \sin \omega_d \tau) \\ \sigma &= \zeta\omega_n; \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \end{aligned} \quad (31)$$

En donde las constantes A y B se determinan de las condiciones iniciales indicadas en la figura 5, o sea:

$$\text{Para } \tau = 0, \quad e_1(0) = \varepsilon, \quad \frac{de_1(0)}{d\tau} = x_{20} \quad (32)$$

A efectos de simplificar los cálculos y aclarar el significado de la transformación puntual, se introduce una hipótesis simplificada que consiste en poner $A = 0$, con lo cual se verifican las siguientes relaciones para las constantes K_1 y K_2 :

$$A = 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{K}{\omega_n^2} \Rightarrow \frac{e_a}{u_a} = \frac{1}{K_2} \left(\frac{K_2}{u_a} r - 1 \right) \quad (33)$$

De la ecuación (33) se deduce el valor de K_2 y el valor límite del escalón de entrada para que la constante K_2 sea positiva

$$K_2 = \frac{u_a}{r - e_a}; \quad r > e_a \quad (34)$$

El valor de K_1 se obtiene de la ecuación:

$$K_1 = \frac{2\zeta\omega_n - 1}{K_m}; \quad 2\zeta\omega_n > 1 \quad (35)$$

A partir de las ecuaciones (31) y (33) se determinan los valores de $x_1 = e_1$ y $x_2 = de_1/d\tau$:

$$x_1(\tau) = \frac{K}{\omega_n^2} + e^{-\sigma\tau} \frac{x_{20}}{\omega_d} \operatorname{sen}\omega_d\tau \quad (36)$$

$$x_2(\tau) = e^{-\sigma\tau} \left(-\sigma \frac{x_{20}}{\omega_d} \operatorname{sen}\omega_d\tau + x_{20} \cos\omega_d\tau \right) \quad (37)$$

A partir de las ecuaciones (36) y (37) se puede determinar el tiempo de vuelo para pasar del punto (ε, x_{20}) al punto $(-\varepsilon, -x_{2a})$, tal como se indica en la figura 5. Teniendo en cuenta que

$$x_1(\tau_a) = -\varepsilon; \quad x_2(\tau_a) = -x_{2a} \quad (38)$$

se deducen las siguientes relaciones:

$$e^{-\sigma\tau_a} \operatorname{sen}\omega_d\tau_a = -\frac{2\omega_d\varepsilon}{x_{20}} \quad (39)$$

$$e^{-\sigma\tau_a} \cos\omega_d\tau_a = -\left(\frac{x_{2a} + 2\sigma\varepsilon}{x_{20}} \right) \quad (40)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (39) y (40) y sumando se obtiene el término exponencial:

$$e^{-\sigma\tau_a} = \frac{\sqrt{4\omega_d^2\varepsilon^2 + (x_{2a} + 2\sigma\varepsilon)^2}}{x_{20}} \quad (41)$$

Sustituyendo la ecuación (41) en la (40) se obtiene:

$$\cos\omega_d\tau_a = -\frac{x_{2a} + 2\sigma\varepsilon}{\sqrt{4\omega_d^2\varepsilon^2 + (x_{2a} + 2\sigma\varepsilon)^2}} \quad (42)$$

De las ecuaciones (39) y (40) se deduce que $\operatorname{sen}\omega_d\tau_a < 0$; $\cos\omega_d\tau_a < 0$ y por tanto $\omega_d\tau_a$ es un ángulo del tercer cuadrante, con lo cual el tiempo de vuelo se determina de la ecuación:

$$\tau_a = \frac{1}{\omega_d} \left(\arccos \frac{x_{2a} + 2\sigma\varepsilon}{\sqrt{4\omega_d^2\varepsilon^2 + (x_{2a} + 2\sigma\varepsilon)^2}} + (2k-1)\pi \right) \quad (42)$$

en donde k puede tomar los valores $k = 1, 2, 3, \dots$. Sustituyendo la ecuación (42) en las (39) y (40) se obtienen las ecuaciones de la transformación puntual buscada. La forma de operar sería fijar un conjunto de valores de x_{2a} y obtener los correspondientes tiempos τ_a , y a partir de la ecuación (39) determinar el correspondiente

valor de x_{20} . Se puede comprobar que el valor mínimo de x_{20} viene dado por la expresión:

$$(x_{20})_{\min} = 2\omega_n\varepsilon \cdot \exp\left(\frac{\zeta(\pi + \arccos\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad (43)$$

y que la pendiente de la transformación puntual viene dada por:

$$\frac{dq}{dp} = \frac{e^{-\sigma\tau_a}}{\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\omega_d\tau_a - \cos\omega_d\tau_a \right)} \quad (44)$$

siendo $q = x_{2a}$ y $p = x_{20}$. Puesto que tanto el seno como el coseno son negativos, dq/dp será positiva para valores pequeños de ζ y además para valores grandes del tiempo de vuelo τ_a la pendiente tiende hacia cero. Por consiguiente si la curva de la transformación puntual (cuyas ecuaciones paramétricas son las (39) y (40)), no corta a la recta $p = q$, el servosistema evoluciona hacia un estado de equilibrio sin realizar oscilaciones, y el error dependerá de la anchura de la característica de histéresis del relé. En la figura 8 se muestra una curva típica de transformación puntual para este caso.

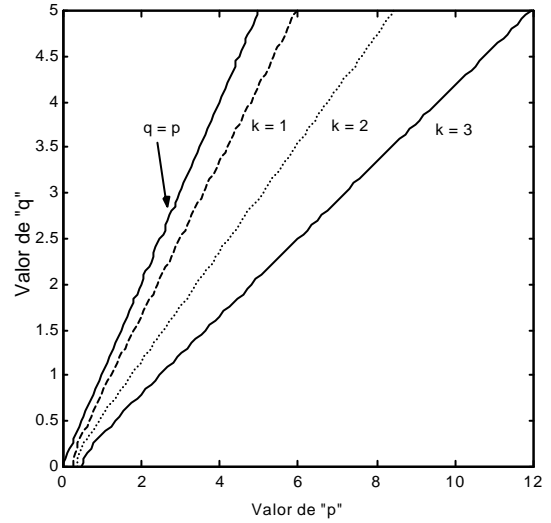


Figura 8 Transformaciones puntuales para valores $k = 1, 2, 3$. Datos: $u_a = 1$, $e_a = 1$, $r = 2$, $K_1 = 0.1$, $K_2 = 1$, $\zeta = 0.055$.

Se observa que los resultados obtenidos de la transformación puntual a través del cálculo numérico coinciden con los resultados analíticos. A continuación se simula el servomotor con los datos anteriores, obteniéndose un comportamiento regular como se indica en la figura 9.

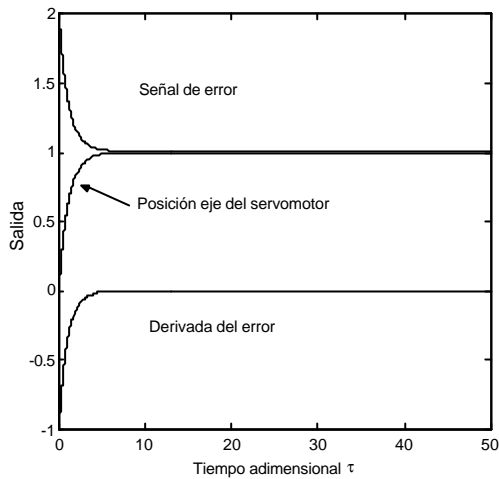


Figura 9 Respuesta del sistema con realimentación de posición y velocidad. $K_1 = 0.1$, $K_2 = 1$.

2.2.2 Raíces reales

En este caso son válidas las ecuaciones (26), (27) y (28), aunque se va a demostrar que existen unos valores máximos para las constantes de realimentación K_1 y K_2 . Las raíces de la ecuación característica de la ecuación (26) son:

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\sigma \pm \omega_d \quad (45)$$

siendo el coeficiente de amortiguamiento $\zeta > 1$. En este caso, la solución general de la ecuación (26) es de la forma:

$$e_1(\tau) = \frac{K}{\omega_n^2} + e^{-\sigma\tau} (Ae^{\omega_d\tau} + Be^{-\omega_d\tau}) \quad (46)$$

Las constantes A y B se determinan con las condiciones definidas en la ecuación (32), con lo que se obtiene:

$$x_1(\tau) = \frac{K}{\omega_n^2} + \frac{e^{-\sigma\tau}}{\omega_d} \left[\frac{(x_{20} + K_\epsilon \sigma) \text{sh} \omega_d \tau +}{\omega_d K_\epsilon \text{ch} \omega_d \tau} \right] \quad (47)$$

$$x_2(\tau) = \frac{\sigma e^{-\sigma\tau}}{\omega_d} \left[\frac{(x_{20} + K_\epsilon \sigma) \text{sh} \omega_d \tau +}{\omega_d K_\epsilon \text{ch} \omega_d \tau} \right] + \frac{e^{-\sigma\tau}}{\omega_d} \left[\frac{(x_{20} + K_\epsilon) \omega_d \text{ch} \omega_d \tau +}{\omega_d^2 K_\epsilon \text{ch} \omega_d \tau} \right] \quad (48)$$

siendo:

$$K_\epsilon = \epsilon - \frac{K}{\omega_n^2} \quad (49)$$

A partir de las ecuaciones (47) y (48) se puede determinar el tiempo de vuelo utilizando las ecuaciones (38), de donde se obtiene:

$$-\epsilon - \frac{K}{\omega_n^2} + \frac{e^{-\sigma\tau}}{\omega_d} \left[\frac{(x_{20} + K_\epsilon) \text{sh} \omega_d \tau +}{\omega_d K_\epsilon \text{ch} \omega_d \tau} \right] \quad (50)$$

El segundo miembro de la ecuación (50) es positivo siempre que K_ϵ lo sea, con lo cual la única posibilidad de que se cumpla la igualdad (50) es que se verifique las siguientes desigualdades:

$$-\epsilon - \frac{K}{\omega_n^2} > 0 \Rightarrow \frac{1 - K_2 r / u_a}{\omega_n^2} > \epsilon \quad (51)$$

$$1 > K_2 \left(\frac{e_a + r}{u_a} \right) \quad (52)$$

para lo cual se ha tenido en cuenta la ecuación (27). La forma de operar para obtener las constantes de realimentación de posición y velocidad sería:

- Fijar los valores de u_a , e_a , K_m , τ_m y el valor de la señal de referencia r . Con ello se conoce ϵ de la ecuación (15).
- Elegir un valor de K_2 que verifique la desigualdad (52).
- Calcular ω_n y K_1 de las ecuaciones (27) para lo cual es necesario fijar $\zeta > 1$, tal que se cumpla:

$$\zeta > \frac{1}{2\omega_n} > 1 \quad (53)$$

Por consiguiente, tomando:

$$K_\omega = -\epsilon - \frac{K}{\omega_n^2} > 0 \quad (54)$$

las ecuaciones (47) y (48) para el tiempo de vuelo τ_a se pueden escribir de la forma:

$$e^{-\sigma\tau_a} \left[\frac{(x_{20} + K_\epsilon \sigma) \text{sh} \omega_d \tau_a +}{\omega_d K_\epsilon \text{ch} \omega_d \tau_a} \right] = K_\omega \omega_d \quad (55)$$

$$e^{-\sigma\tau_a} \left[\frac{(x_{20} + K_\epsilon \sigma) \omega_d \text{ch} \omega_d \tau_a +}{\omega_d^2 K_\epsilon \text{sh} \omega_d \tau_a} \right] = K_\omega \sigma - x_{2a} \omega_d \quad (56)$$

Para un conjunto de valores dados de $x_{20} = p$ de la ecuación (55) se determinan los tiempos de vuelo τ_a , y de la ecuación (56) se calculan los correspondientes valores de $x_{2a} = q$, con lo cual se puede representar la transformación puntual tal como se muestra en la figura 10.

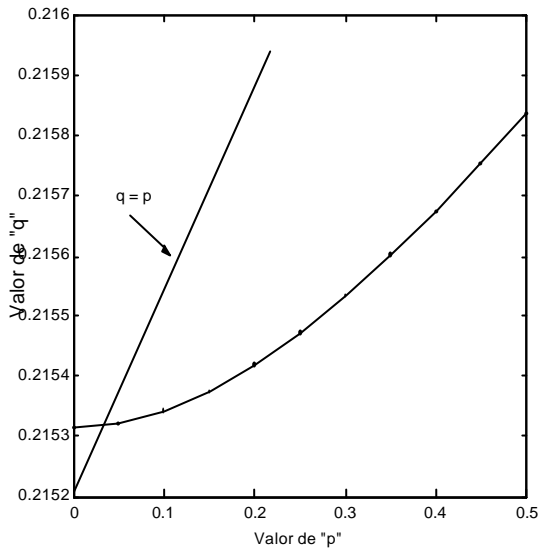


Figura 10 Transformación puntual con raíces reales. $K_1 = 3.28$, $K_2 = 1$, $u_a = 1$, $e_a = 1$, $r = 1$, $K_m = 0.1$, $\tau_m = 10$, $\zeta = 1.05$.

En la figura se aprecia que la curva de transformación corta a la recta $q = p$ con pendiente menor que la unidad y por tanto el comportamiento del sistema será auto oscilante. En la figura 11 se muestra el ciclo límite asociado a la variable de error y su derivada.

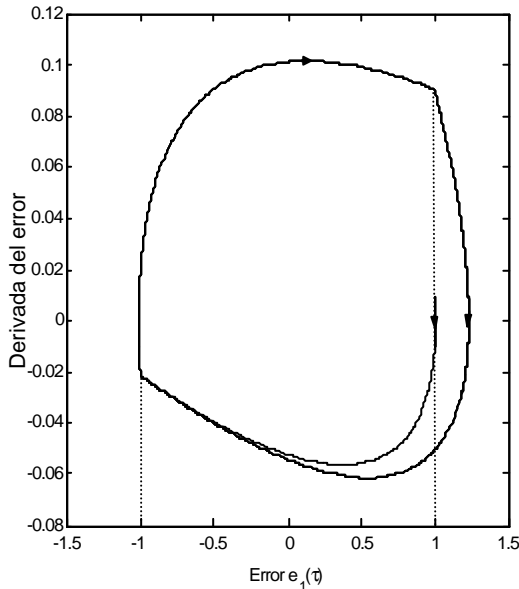


Figura 11 Comportamiento auto oscilante en el plano de fases.

En la figura 11 se aprecia la discontinuidad de la derivada $de_1(\tau)/d\tau$ en los puntos de conmutación del relé.

3 OSCILACIONES CAÓTICAS DEL SERVOMOTOR

La investigación del comportamiento caótico está basado en el método de las transformaciones puntuales. De acuerdo con el análisis realizado en el apartado 2.2.1, se ha visto que es posible obtener distintas ramas de la transformación puntual para diferentes valores de k , que en realidad pueden considerarse equivalentes en el sentido de que pertenecen a la misma curva de transformación. Si estas ramas cortaran a la recta $q = p$ con pendiente mayor que la unidad, el sistema tendría infinitos puntos de corte todos ellos inestables. Si además los puntos de corte se presentan a valores cada vez más pequeños de p y q , se tendría un sistema con comportamiento acotado, pero irregular, ya que por hipótesis en cada punto de corte el sistema es inestable, de forma que en los sucesivos tiempos de vuelo al pasar de la zona "a" a la "b" de la figura 5, el comportamiento del sistema sería impredecible. Se llega así a una situación en la que a priori se dan todos los condicionamientos para que aparezca comportamiento caótico.

Puesto que la transformación puntual debe ser tal que el servomotor sea de alguna forma inestable, se cambia la estructura de la ecuación (25), tomando $r = 0$ y $K_1 < 0$, lo cual equivale a una realimentación positiva de velocidad. Además se supone que $K_1 K_m > 1$, con lo cual la ecuación (25) se transforma en:

$$\frac{d^2 e_1}{d\tau^2} - (K_1 K_m - 1) \frac{de_1}{d\tau} + K_2 K_m \tau_m e_1 = -\frac{u(e_1)}{u_a} \quad (57)$$

Introduciendo la nomenclatura:

$$K_m K_1 - 1 = 2\zeta\omega_n; \quad \omega_n^2 = K_2 K_m \tau_m; \quad \frac{u(e_1)}{u_a} = u_1(e_1) \quad (58)$$

La solución general de la ecuación (57) con $u_1(e_1) = -1$ es de la forma:

$$e_1(\tau) = \frac{1}{\omega_n^2} + e^{\sigma\tau} (A \cos \omega_d \tau + B \sin \omega_d \tau) \quad (59)$$

siendo:

$$r_{1,2} = \zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d \quad (60)$$

En la ecuación (59) se hace la hipótesis $A = 0$, con lo cual teniendo en cuenta las condiciones

iniciales definidas en (32), se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$e_1(\tau) = \frac{1}{\omega_n^2} + e^{\sigma\tau} \frac{p}{\omega_d} \sin \omega_d \tau \quad (61)$$

$$\frac{de_1(\tau)}{d\tau} = \frac{p}{\omega_d} e^{\sigma\tau} (\sigma \sin \omega_d \tau + \omega_d \cos \omega_d \tau) \quad (62)$$

siendo $p = x_{20}$ y $\varepsilon = 1/\omega_n^2$. El tiempo de vuelo desde $x_{20} = p$ hasta $-x_{2a} = -q$ se obtiene de las ecuaciones (38), (61) y (62), con lo cual se deduce:

$$e^{\sigma\tau_a} \sin \omega_d \tau_a = -\frac{2\omega_d}{\omega_n^2 p} \quad (63)$$

$$-q = \frac{p}{\omega_d} e^{\sigma\tau_a} (\sigma \sin \omega_d \tau_a + \omega_d \cos \omega_d \tau_a) \quad (64)$$

De las ecuaciones (63) (64) se deduce:

$$e^{\sigma\tau_a} = \frac{\sqrt{4\varepsilon^2 \omega_d^2 + (2\varepsilon\sigma - q)^2}}{p} \quad (65)$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones (63), (64) y (65) se obtiene:

$$\cos \omega_d \tau_a = \frac{2\varepsilon\sigma - q}{\sqrt{4\varepsilon^2 \omega_d^2 + (2\varepsilon\sigma - q)^2}} \quad (66)$$

Al ser el tiempo de vuelo positivo, el coseno del ángulo $\omega_d \tau_a$ es positivo, y teniendo en cuenta la ecuación (63) el seno de $\omega_d \tau_a$ debe ser negativo, por lo que el ángulo pertenece al cuarto cuadrante, de donde se deduce la expresión general del tiempo de vuelo dada por:

$$\tau_a = \frac{1}{\omega_d} \left[2\pi k - \arccos \frac{2\varepsilon\sigma - q}{\sqrt{4\varepsilon^2 \omega_d^2 + (2\varepsilon\sigma - q)^2}} \right] \quad (67)$$

en donde $k = 1, 2, 3, \dots$. Dando valores a q , para cada valor de k se obtienen los tiempos de vuelo, y a partir de la ecuación (63) se determinan valores de p correspondientes a cada q . En la figura 12 se muestran las diferentes ramas de la transformación puntual y como cortan a la recta $q = p$ con pendiente superior a uno, dando lugar a infinitos puntos inestables a valores cada vez más pequeños de p y q . En la figura 13 se muestra la posición del eje del servomotor para dos condiciones iniciales muy próximas, mostrando que existe una fuerte dependencia sensible, lo cual es indicador de comportamiento caótico [6]. Cambiando los valores de los parámetros del servomotor y/o del relé es posible obtener una familia de atractores extraños muy particular, ya que el comportamiento caótico aparece ligado a la

estructura del sistema, sin que se le aplique ningún tipo de perturbación exterior.

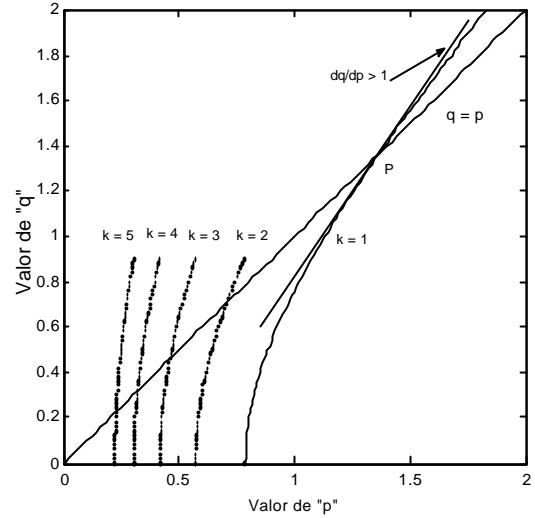


Figura 12 Transformación puntual asociada al comportamiento caótico. $u_a = 1$, $e_a = 0.25$, $K_m = 1$, $\tau_m = 1$, $\zeta = 0.05$, $\omega_n = 2$, $K_1 = 1.2$, $K_2 = 4$.

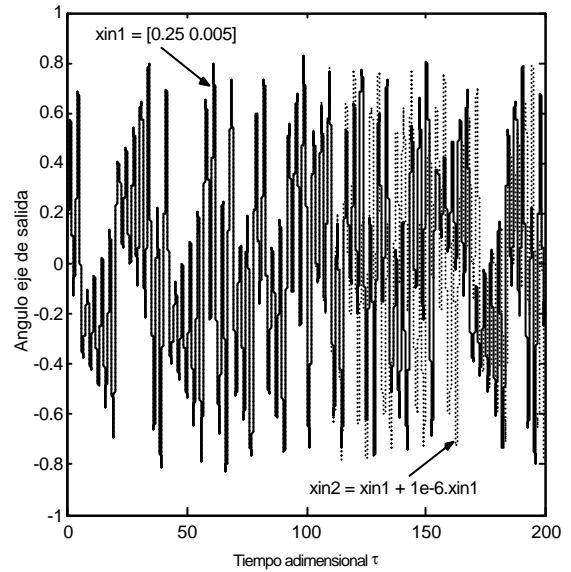


Figura 13 Dependencia sensible. Error en las condiciones iniciales de 10^{-6} .

La figura 13 muestra la fuerte dependencia sensible en la posición angular del eje del servomotor, cuando se simula el sistema con dos condiciones iniciales que difieren en un error 5000 veces más pequeño que el intervalo de simulación (0.005 segundos adimensionales). La figura 14 muestra el atractor extraño en el espacio de fases.

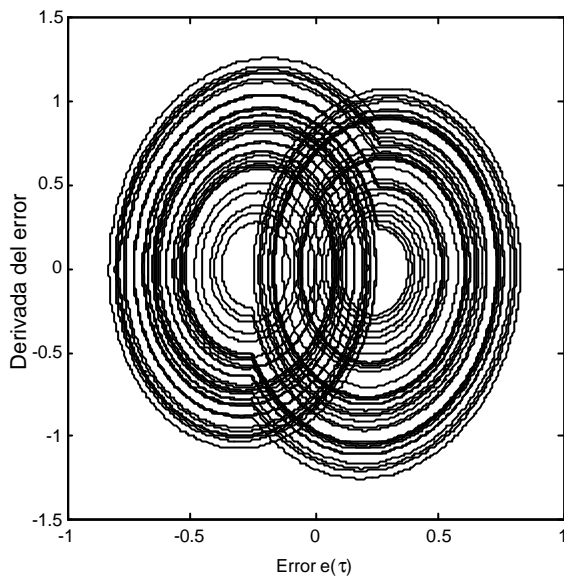


Figura 14 Atractor extraño con dos centros de atracción.

Son posibles otros tipos de atractores variando los valores de las constantes del servomotor y del relé, tal como el indicado en la figura 15.

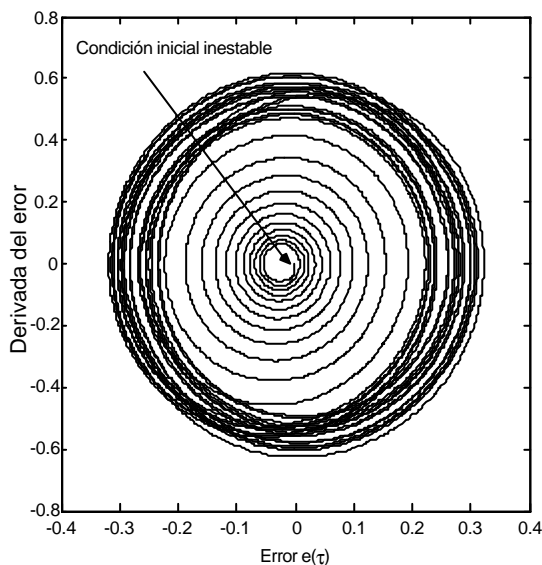


Figura 15 Atractor extraño obtenido con: $u_a = 1$, $e_a = 0.25$, $K_m = 0.1$, $\tau_m = 1$, $\zeta = 0.05$, $\omega_h = 2$, $K_1 = 11.2$, $K_2 = 40$.

Se observa que el sistema parte de un punto inicial inestable y acaba en un atractor extraño con forma anular y del que el sistema ya no sale nunca. En este caso no existen centros de atracción.

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se comprueba que es posible predecir el comportamiento del sistema, sin realizar ningún tipo de aproximación, utilizando el método de las transformaciones puntuales. Se determinan las condiciones que dan lugar a comportamiento regular y auto oscilatorio con y sin realimentación de posición y velocidad. Se comprueba que es posible la existencia de transformaciones puntuales con infinitos puntos de corte a la recta $q = p$, los cuales pueden ser estables o inestables dependiendo del valor absoluto de la pendiente en el punto de corte. Si no existen puntos de corte de la transformación puntual con la recta $q = p$, se comprueba que la realimentación de posición y velocidad fija unos valores máximos a las constantes de realimentación tales que el sistema deja de ser auto oscilante. Bajo determinadas condiciones se comprueba que el servomotor puede presentar oscilaciones caóticas sin la influencia de perturbaciones externas periódicas. El método de análisis propuesto puede extenderse a otros tipos de sistemas lineales a trozos, los cuales tienen la ventaja de que en las diferentes zonas de espacio de fases puede obtenerse una solución analítica.

REFERENCIAS

- [1] Andronov, A. A., Vitt A. A., Khaikin, S. (1966). Theory of Oscillations. Pergamon Press.
- [2] Franklin, G.F., Powell, J.D., Emami-Naeimi, A. (1991). Control de Sistemas Dinámicos con Retroalimentación. Addison-Wesley.
- [3] Guckenheimer, J., Holmes, P. (1983). Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer Verlag, New York.
- [4] Pérez Polo, M. (2000). Comportamiento Caótico de un Reactor Tipo Tanque en Régimen de Autorregulación. XXV Jornadas de Automática. Sevilla.
- [5] Poincaré H. (1881-1882). "Sur les courbes définies par des équations différentielles". Journal Mathématiques pures et appliqués.
- [6] Wiggins, S. (1990). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos. Springer Verlag, New York.

