

# CONTROL ROBUSTO QFT DE UN HELICÓPTERO DE 3 GDL

I.Egaña, M.Iribas, J. Mota, J. Castillejo, P.Vital, J.Villanueva, M. Barreras, M. García-Sanz  
Departamento de Automática y Computación, Campus de Arrosadía, 31006 - Pamplona.  
E-mail: igor.egana@unavarra.es

## Resumen

Se propone el diseño de un controlador robusto mediante la técnica QFT aplicado a un prototipo de helicóptero de laboratorio de 3 grados de libertad. El diseño está compuesto por dos lazos en cascada para el control del avance del helicóptero y otro independiente para la elevación. Se muestran los resultados experimentales de la implementación real del controlador.

**Palabras Clave:** Control Robusto, QFT, Sistemas de Realimentación.

## 1 INTRODUCCIÓN

Desde los años 50 y durante toda la década de los 60, el Profesor I. Horowitz [6-8] profundizó en los fundamentos de la realimentación y ahondó en las capacidades que de ella se derivan, dando lugar a la llamada Teoría de la Realimentación Cuantitativa (QFT, *Quantitative Feedback Theory*).

Esta es una técnica que, basada en el uso de la realimentación, busca el cumplimiento de unas tolerancias deseadas de funcionamiento del sistema, a pesar de la incertidumbre de la planta y las perturbaciones del sistema.

A partir de los brillantes comienzos de Horowitz, se ha desarrollado toda una teoría que trata desde el control de sistemas monovariantes [6, 8] hasta los multivariantes más complejos [9, 10, 13, 14, 1, 4], pasando por los no lineales [15] y por procesos con grandes retardos variables [5], entre otros. No obstante, QFT no ha quedado solamente en el ámbito académico. Tal y como se relata en el libro recientemente publicado por Houpis y Rasmussen [11], las aplicaciones industriales son numerosas.

En este trabajo se expone la resolución de un caso práctico real [12] por medio de una maqueta de laboratorio de un helicóptero de 3 grados de libertad: la *3D Helicopter Experiment*, fabricado por *Quanser Consulting*. El prototipo se muestra en la Figura 1.

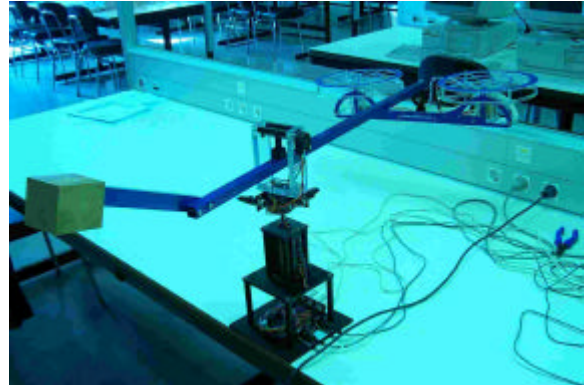


Figura 1: Maqueta del Helicóptero 3D Helicopter Experiment, de Quanser Consulting.

## 2 MODELO DEL HELICÓPTERO

Tal y como se ha comentado, el proceso a controlar es el helicóptero de la Figura 1. Consta de 3 grados de libertad medidos mediante otros tantos *encoders* absolutos: la elevación (altura que alcanza el cuerpo del helicóptero y que viene a resultar el giro en torno a un eje horizontal), el *pitch* (cabeceo en torno al eje longitudinal del aparato) y el avance (giro en torno a un eje perpendicular al suelo).

Por otra parte, los actuadores se reducen a dos motores eléctricos de tensión continua acoplados a cada lado del eje longitudinal que junto con sendas hélices producen una fuerza proporcional a la tensión de entrada, y forman parte del cuerpo del sistema. En este artículo se considera el control de la elevación por una parte, y el del ángulo de *pitch* para lograr el avance deseado, tal y como se detalla posteriormente. Para presentar el control de estos ejes, en este apartado se presenta el modelo matemático del helicóptero.

### 2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES

A continuación se exponen detalladamente los grados de libertad considerados, las ecuaciones diferenciales que describen las dinámicas, así como los parámetros que se incluyen.

### 2.1.1 Ángulo de Elevación

Tal y como se muestra en la Figura 2, el prototipo bascula respecto al eje perpendicular al plano de la figura según el ángulo  $e$ .

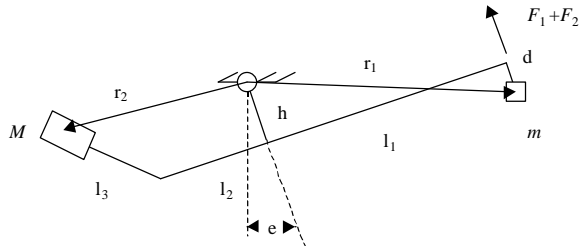


Figura 2: Geometría del ángulo de la elevación

La actuación sobre el sistema es la suma de las fuerzas provocadas por las hélices accionadas por los dos motores eléctricos, y la salida es el ya mencionado ángulo de elevación,  $e$ .

Tal y como se puede deducir a partir de las ecuaciones de Lagrange, el modelo matemático es el siguiente,

$$\begin{aligned} (F_1 + F_2) \cdot l_1 - m \cdot g \cdot [(h + d) \cdot \sin e + l_1 \cdot \cos e] + \\ + M \cdot g \cdot (l_2 + l_3 \cdot \cos q) \cdot \cos e \\ + M \cdot g \cdot (l_3 \cdot \sin e - h) \cdot \sin e \\ - b_e \cdot e' = J_e \cdot e'' \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $h$ ,  $d$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ , longitudes del sistema;  $m$ , la suma de la masa de los dos motores y  $M$  la masa del contrapeso;  $b_e$ , el rozamiento dinámico de la elevación;  $g$ , la aceleración de la gravedad.

Tal y como se observa, se trata de una ecuación diferencial que es necesario linealizar en torno al ángulo de elevación  $e = 0$ .

$$\begin{aligned} (F_1 + F_2) \cdot l_1 = J_e \cdot e'' + b_e \cdot e' \\ + e \cdot [m \cdot g \cdot (h + d) + M \cdot g \cdot (h - l_3 \cdot \sin q)] \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.1.2 Ángulo de Pitch

Como se muestra en la Figura 3, el prototipo cabecea en torno al eje longitudinal perpendicular al plano de la figura.

La actuación sobre el sistema está constituida por las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  provocadas por las acciones de las hélices impulsadas por los dos motores eléctricos, y la salida es el ángulo de *pitch*,  $p$ .

Tal y como se puede deducir a partir de las ecuaciones de Lagrange, el modelo matemático es el siguiente,

$$\begin{aligned} m \cdot p'' \cdot [l^2 + (d - c)^2] - m \cdot g \cdot \sin p \cdot (c - d) = \\ = (F_2 - F_1) \cdot l - b_p \cdot p' \end{aligned} \quad (3)$$

siendo  $l$  y  $c$ , longitudes del sistema;  $b_p$ , el rozamiento dinámico del *pitch*; el resto de parámetros son los definidos anteriormente.

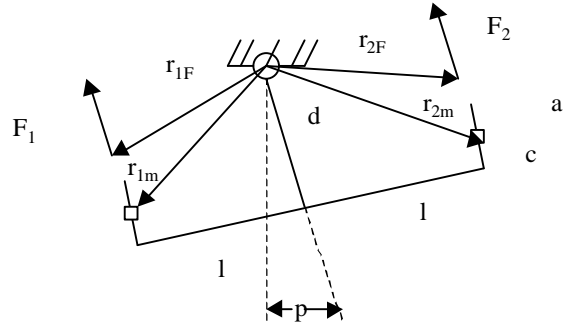


Figura 3: Geometría del ángulo de *pitch*

La linealización de esta ecuación diferencial en torno a  $p = 0$ , da como resultado,

$$\begin{aligned} m \cdot p'' \cdot [l^2 + (d - c)^2] - m \cdot g \cdot p \cdot (c - d) = \\ = (F_2 - F_1) \cdot l - b_p \cdot p' \end{aligned} \quad (4)$$

### 2.1.3 Ángulo de Avance

Según se muestra en la Figura 4, el prototipo gira respecto al eje perpendicular al plano de la figura.

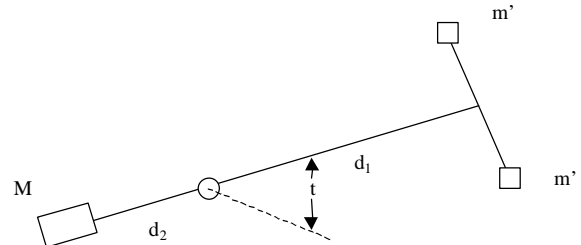


Figura 4: Geometría del ángulo de avance, según la vista zenital

La actuación sobre el sistema es la proyección sobre el plano horizontal de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  aplicadas en las masas  $m'$ , provocadas por las hélices impulsadas por los dos motores eléctricos. La salida es el ángulo de avance,  $t$ .

Tal y como se puede deducir a partir de las ecuaciones de Lagrange, el modelo matemático es el siguiente,

$$(F_1 + F_2) \cdot \sin p \cdot l_1 - b_t \cdot t' = J_g \cdot t'' \quad (5)$$

Al igual que con los casos anteriores, se linealiza en torno al ángulo  $p=0$ ,

$$(F_1 + F_2) \cdot p \cdot l_1 - b_t \cdot t' = J_g \cdot t'' \quad (6)$$

siendo  $b_t$ , el rozamiento dinámico del avance;  $J_g$ , la inercia del conjunto respecto al eje de avance; el resto de parámetros son los definidos anteriormente.

## 2.2 MODELO FRECUENCIAL PARAMÉTRICO

A partir de las ecuaciones diferenciales lineales (2), (4) y (6), los modelos considerados son los de las Figuras 5a y 5b, según las funciones de transferencia de las ecuaciones (7), (8) y (9), siendo  $F_{suma}$  y  $F_{dif}$  la suma y la diferencia de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  respectivamente.

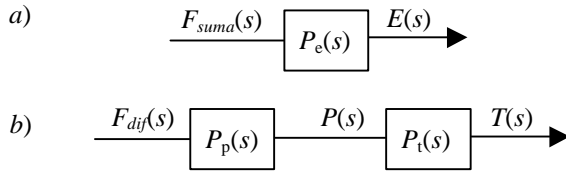


Figura 5: Funciones de transferencia de los sistemas lineales considerados

$$\frac{E(s)}{F_{suma}(s)} = \frac{\frac{l_1}{J_e}}{s^2 + \frac{b}{J_e} \cdot s + \frac{[m \cdot g \cdot (h+d) + M \cdot g \cdot (h-l_3 \cdot \text{sen } \boldsymbol{q})]}{J_e}} \quad (7)$$

$$\frac{P(s)}{F_{dif}(s)} = \frac{\frac{l}{m \cdot [l^2 + (d-c)^2]}}{s^2 + \frac{b}{m \cdot [l^2 + (d-c)^2]} \cdot s + \frac{g \cdot (c-d)}{[l^2 + (d-c)^2]}} \quad (8)$$

$$\frac{T(s)}{P(s)} = \frac{\frac{F_{suma}(s)}{J_g}}{s^2 + \frac{b}{J_g} \cdot s} \quad (9)$$

La única objeción que cabe formular respecto al anterior modelo afecta a la ecuación (9), dado que la función de transferencia depende de la variable  $F_{suma}$ . No obstante, es necesario señalar que dado que el sistema va a evolucionar en torno a una elevación -ángulo e respecto a la horizontal- nula, la variable  $F_{suma}$  tiene en general un valor constante de equilibrio para mantener el helicóptero en dicha posición.

A partir de los parámetros físicos tales como longitudes, masas y rozamientos estimados, se puede deducir el modelo con incertidumbre representado por las funciones de transferencia (10), (11) y (12), y

la Tabla 1. Las variables de entrada de las funciones de transferencia que se incluyen a continuación son la suma de las tensiones aplicadas a los motores y la diferencia de las mismas, con la notación  $V_{suma}$  y  $V_{dif}$ , teniendo en cuenta que la relación entre la tensión y la fuerza generada por el conjunto del motor es proporcional a través de un valor de  $k_m = 0.46$  N/V.

$$\frac{E(s)}{V_{suma}(s)} = \frac{k_e \cdot w_{ne}^2}{s^2 + 2 \cdot \boldsymbol{x}_e \cdot w_{ne} \cdot s + w_{ne}^2} \quad (10)$$

$$\frac{P(s)}{V_{dif}(s)} = \frac{k_p \cdot w_{np}^2}{s^2 + 2 \cdot \boldsymbol{x}_p \cdot w_{np} \cdot s + w_{np}^2} \quad (11)$$

$$\frac{T(s)}{P(s)} = \frac{k_t}{s \cdot (T \cdot s + 1)} \quad (12)$$

Parámetro	Mínimo	Máximo
$k_e$	0.01	0.099
$\boldsymbol{x}_e$	0.1	0.16
$w_{ne}$	0.55	0.58
$k_p$	0.09	0.27
$\boldsymbol{x}_p$	0.039	0.097
$w_{np}$	1.90	2.28
$k_t$	0.75	2.03
$T$	6	16

Tabla 1: Intervalos paramétricos del modelo

## 3 DISEÑO DEL CONTROLADOR

En la presente sección, se incluye primeramente una breve descripción del proceso de diseño del controlador según la metodología QFT seguida por la Toolbox de Matlab®, y desarrollada por Borghesani *et al.* [2], para incluir posteriormente las especificaciones del diseño y el proceso de diseño de cada uno de los lazos de control.

### 3.1 METODOLOGÍA DE DISEÑO SEGÚN QFT

La Teoría QFT está basada en el análisis frecuencial del efecto de la realimentación, para reducir la influencia en el sistema tanto de las perturbaciones externas como de la incertidumbre del modelo, y estabilizar el sistema en caso necesario. Saca provecho de la utilización de un prefiltro en lazo abierto delante del lazo de realimentación para ajustar el comportamiento dentro de las tolerancias de seguimiento de referencia en su caso, diseñándose así un sistema de 2 Grados de Libertad.

El diseño parte de un modelo del sistema que incluye la posible incertidumbre, ya sea paramétrica, no

paramétrica o mixta. A partir de este punto se calcula la respuesta para un conjunto significativo de plantas dentro de todas las posibles del espacio de incertidumbre, y a unas frecuencias igualmente representativas de la dinámica del proceso. Cada uno de los conjuntos de respuestas a una frecuencia dada es lo que se conoce como *template*.

A continuación, las especificaciones frecuenciales exigidas, se convierten en una serie de zonas permitidas y prohibidas para cada frecuencia en el diagrama de Nichols. Las líneas que delimitan estas zonas son los llamados *bounds*. Para garantizar la robustez del diseño, estos cálculos se realizan tomando en consideración la incertidumbre del sistema.

En la etapa de diseño, denominada *loop-shaping* se aprovechan las propiedades del diagrama de Nichols y se traza el producto de la planta por el controlador -inicialmente igual a la unidad- para el caso de una de las plantas (planta nominal). El Ingeniero de Control, basándose en su experiencia añade elementos al controlador: en el momento en que cada uno de los puntos de dicha representación frecuencial yaza sobre la zona permitida por el *bound* a su correspondiente frecuencia, el diseño se considera satisfactorio.

El diseño se completa con la sintonización de un prefiltro. Para ello se ajusta la respuesta del lazo de realimentación a las tolerancias definidas por las especificaciones de seguimiento.

## 3.2 DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

A continuación se detalla el proceso completo seguido hasta alcanzar el controlador del helicóptero.

### 3.2.1 Diseño del lazo de elevación

Las especificaciones para el lazo de elevación son las siguientes:

- estabilidad robusta: mínimos márgenes de ganancia y fase (no simultáneamente) igual a 1.714 (4.68 dB) y 42°, calculados según [3], equivalente a imponer,

$$\left| \frac{P_e \cdot G_e}{1 + P_e \cdot G_e} \right| \leq 1.4 \quad (13)$$

- especificación de reducción de la sensibilidad:

$$\left| \frac{1}{1 + P_e \cdot G_e} \right| \leq \left| \frac{s^2 + 2 \cdot s + 1}{s^2 + 4 \cdot s + 1.5} \right| \quad (14)$$

- limitación del esfuerzo de control: la máxima tensión aplicable a cada motor es de 5 V para el ancho de banda de la planta en el caso de máximo error de elevación considerado, de 25° (0.625 rd), ,

$$\left| \frac{G_e}{1 + P_e \cdot G_e} \right| \leq \left| \frac{5}{0.625} \right| = 8 \quad (15)$$

- especificaciones de seguimiento: se impone una banda de tolerancia en todo el ancho de banda de la planta definida por,

$$|a| \geq |t^{Y/R}(j\omega)| \geq |b| \quad (16)$$

siendo  $t^{Y/R}$  la función de transferencia entre la referencia y la salida, y  $a(\omega)$  y  $b(\omega)$  las cotas superior e inferior que definen la tolerancia mediante las siguientes funciones,

$$a(s) = \frac{25}{s^2 + 3 \cdot s + 25} \quad (17)$$

$$b(s) = \frac{0.5}{s + 0.5} \quad (18)$$

A partir del modelo definido por la ecuación (10) y los parámetros de la Tabla 1, se pueden calcular los *templates* de la Figura 6.

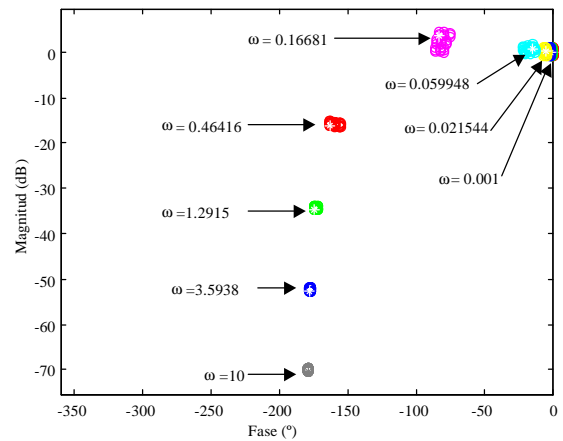


Figura 6: *Templates* de la planta de elevación

A partir de las especificaciones comentadas, la etapa de diseño concluye según la Figura 7, en la que se muestran los *bounds* y el producto de la planta por el controlador resultante. En dicha figura, la respuesta a una frecuencia dada debe permanecer por encima de los *bounds* continuos y por debajo de los discontinuos, y en el exterior de los *bounds* cerrados (continuos y discontinuos).

El controlador diseñado es el siguiente,

$$G_e = \frac{180.8992 \cdot s^2 + 119.7274 \cdot s + 9.2791}{s^2 + 4.4646 \cdot s} \quad (19)$$

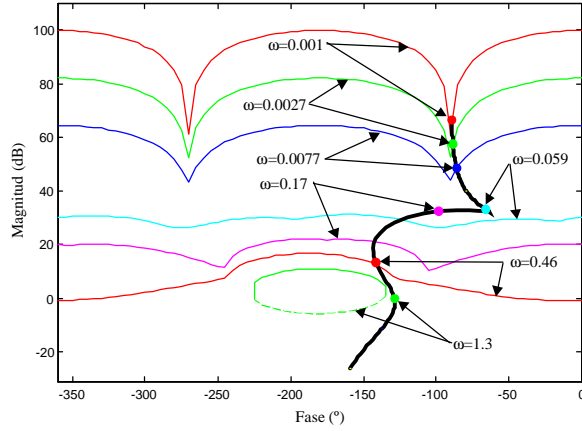


Figura 7: *Loop-shaping* del controlador de elevación

A partir de este punto el diseño del prefiltro es trivial y da como resultado la siguiente función de transferencia,

$$Pf_e = \frac{0.5767 \cdot s^2 + 0.0346 \cdot s + 0.0021}{s^3 + 0.6363 \cdot s^2 + 0.0380 \cdot s + 0.0021} \quad (20)$$

### 3.2.2 Diseño del lazo de *pitch*

Las especificaciones para el lazo de *pitch* son las siguientes:

- estabilidad robusta: análogamente al lazo anterior,

$$\left| \frac{P_e \cdot G_e}{1 + P_e \cdot G_e} \right| \leq 1.4 \quad (21)$$

- especificación de reducción de la sensibilidad:

$$\left| \frac{1}{1 + P_e \cdot G_e} \right| \leq \left| \frac{s^2 + 0.6 \cdot s + 0.09}{s^2 + 1.2 \cdot s + 0.36} \right| \quad (22)$$

- limitación del esfuerzo de control: se considera conveniente una máxima tensión aplicable a cada motor de 2.5 V para el ancho de banda de la planta en el caso de máximo error de elevación considerado, de 60° (1.05 rd),

$$\left| \frac{G_e}{1 + P_e \cdot G_e} \right| \leq \left| \frac{2.5}{1.05} \right| = 2.38 \quad (23)$$

- especificaciones de seguimiento: siguiendo la formulación de la ecuación (16), se impone una banda de tolerancia delimitada por,-

$$a(s) = \frac{90}{s^2 + 13.28 \cdot s + 90} \quad (24)$$

$$b(s) = \frac{32}{s^2 + 16 \cdot s + 32} \quad (25)$$

A partir del modelo definido por la ecuación (11) y los parámetros de la Tabla 1, se pueden calcular los *templates* de la Figura 8.

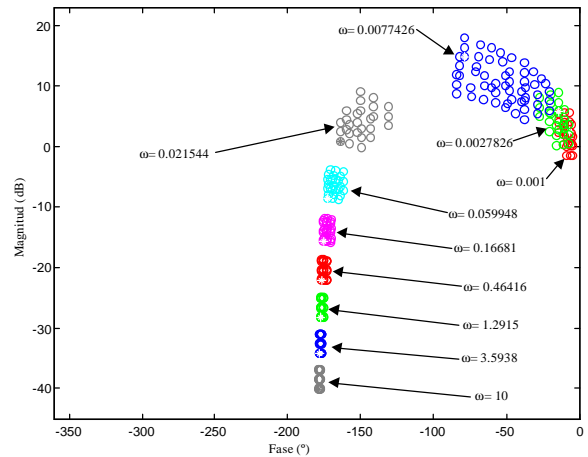


Figura 8: *Templates* de la planta de elevación

El *loop-shaping* correspondiente al controlador de realimentación del *pitch* se puede apreciar en la Figura 9.

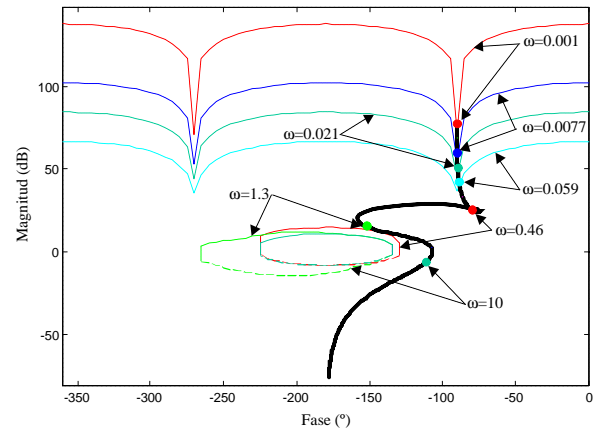


Figura 9: *Loop-shaping* del controlador de *pitch*

El controlador así diseñado es el siguiente,

$$G_p = \frac{163.8625 \cdot s^2 + 135.86 \cdot s + 237.9825}{s^2 + 31.2917 \cdot s} \quad (26)$$

Dado que este lazo es esclavo respecto al de avance, no precisa el ajuste de un prefiltro para el seguimiento. Cualquier dinámica de este tipo quedaría absorbida por el controlador de realimentación de avance.

### 3.2.3 Diseño del lazo de avance

Las especificaciones para el lazo de avance son las siguientes:

- estabilidad robusta: análogamente a los lazos anteriores,

$$\left| \frac{P_e \cdot G_e}{1 + P_e \cdot G_e} \right| \leq 1.4 \quad (27)$$

- especificación de reducción de la sensibilidad:

$$\left| \frac{1}{1 + P_e \cdot G_e} \right| \leq \left| \frac{s^2 + 0.06 \cdot s + 0.0009}{s^2 + 0.12 \cdot s + 0.0036} \right| \quad (28)$$

- especificaciones de seguimiento: siguiendo la formulación de la ecuación (16), se impone una banda de tolerancia delimitada por,

$$a(s) = \frac{90}{s^2 + 13.28 \cdot s + 90} \quad (29)$$

$$b(s) = \frac{32}{s^2 + 16 \cdot s + 32} \quad (30)$$

A partir del modelo definido por la ecuación (12) y los parámetros de la Tabla 1, multiplicado por el lazo cerrado del control del *pitch*, se pueden calcular los *templates* de la Figura 10.

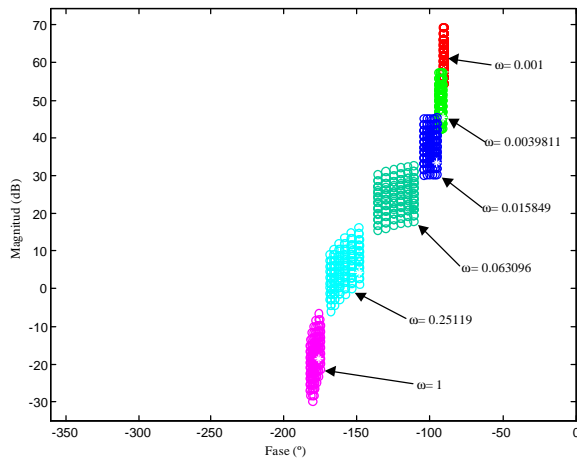


Figura 10: *Templates* de la planta de avance definida a partir del lazo cerrado de *pitch* por la relación entre este y el avance

La Figura 11 muestra el aspecto final del *loop-shaping*, que da como resultado un controlador  $G_t$  como el siguiente,

$$G_t = \frac{4.3562 \cdot s + 1.1701}{s + 2.5173} \quad (31)$$

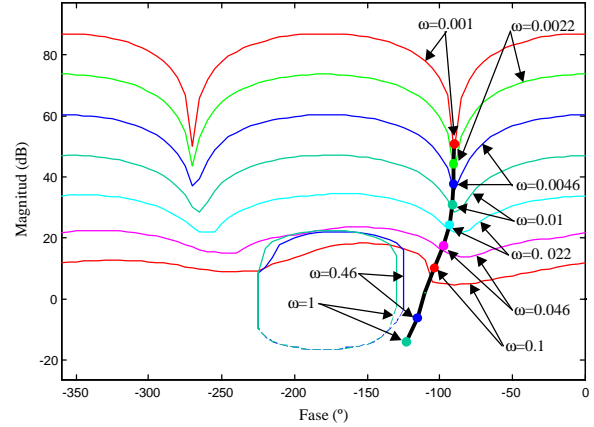


Figura 11: *Loop-shaping* del controlador de avance

Para finalizar el diseño, se ajusta un prefiltro para el seguimiento oportuno de la referencia de avance,

$$P_f = \frac{s^4 + 0.118 \cdot s^3 + 0.0154 \cdot s^2 + 0.00061 \cdot s + 0.00002}{s^4 + 0.1464 \cdot s^3 + 0.0168 \cdot s^2 + 0.00068 \cdot s + 0.00002} \quad (32)$$

## 4 PRUEBAS EXPERIMENTALES

Para finalizar, se incluyen resultados experimentales como consecuencia de la implementación del controlador.

La estructura de control de todo el sistema es la mostrada en la Figura 12. Es importante resaltar que los órdenes de control  $V_{suma}$  y  $V_{dif}$  son aplicadas al sistema real a través de las dos variables reales  $V_1$  y  $V_2$ , que se generan como la semisuma y la semidiferencia de las primeras.

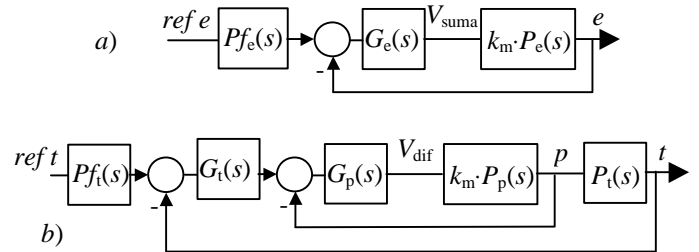


Figura 12: Estructura de control final con el lazo de la elevación (a) y el lazo en cascada del avance (b)

Tal y como se puede observar en la Figura 13, el seguimiento del ángulo de *pitch* es rápido y muy preciso, y está encaminado a forzar el ángulo de avance de referencia. Por otra parte la elevación se

alcanza sin ningún tipo de oscilación y con un error en el estacionario nulo.

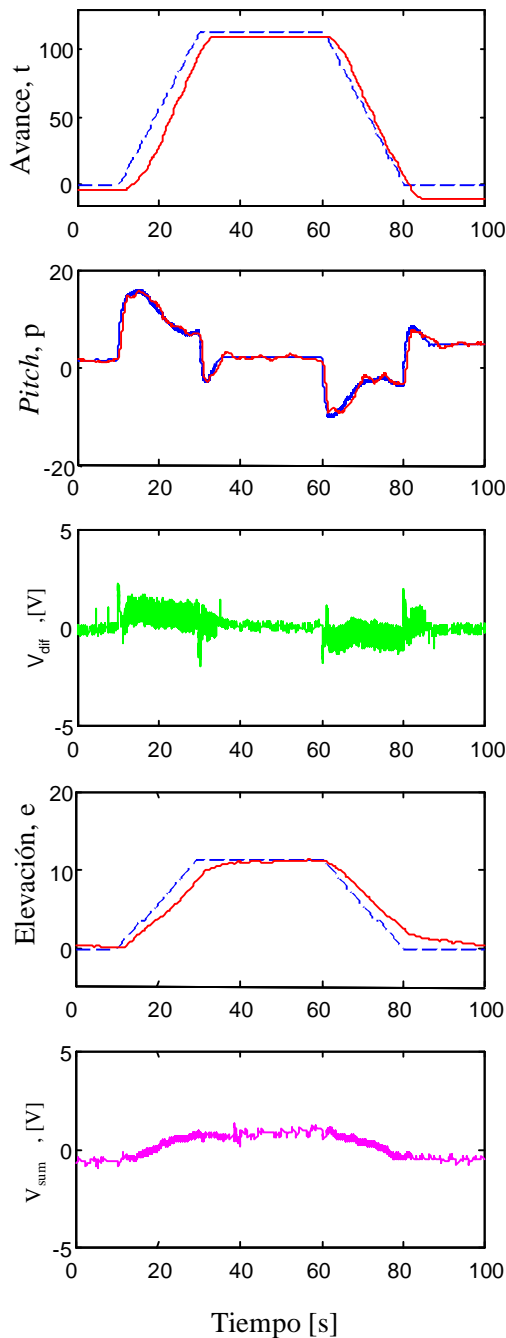


Figura 13: Pruebas experimentales del sistema completo de control

## 5 CONCLUSIONES

Se ha mostrado una aplicación práctica de la técnica de Control Robusto QFT. En este caso, se ha diseñado el controlador completo de una maqueta de laboratorio, incluyendo un controlador de elevación por una parte, y un doble lazo en cascada para gobernar el avance a través del ángulo de *pitch*.

Los resultados prácticos que se han incluido muestran un comportamiento robusto que cumple perfectamente las especificaciones de funcionamiento deseadas.

### Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo dado por la *Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT)* por el proyecto DPI'2000-0785.

### Referencias

- [1] Boje, E. y O. D. I. Nwokah (1999). Quantitative multivariable feedback design for a turbofan engine with forward path decoupling. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **9** (12), pp. 857-882.
- [2] Borghesani, C., Y. Chait, y O. Yaniv (1995). *Quantitative Feedback Theory Toolbox – For use with Matlab*. 1st Edition. The Mathworks Inc.
- [3] Chait, Y. y O. Yaniv (1993). Multi-input/single-output computer aided control design using the Quantitative Feedback Theory, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **3**, pp. 47-54.
- [4] García-Sanz, M. y I. Egaña (2002). Quantitative Non-Diagonal Controller Design For Multivariable Systems With Uncertainty. Aceptado para su publicación en la Parte 2 del Isaac Horowitz Special Issue, en *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- [5] García-Sanz, M. y J. C. Guillén (1999). Lecture Notes, en *Control and Information Sciences*, Ed. Springer Verlag 1999. Vol 243. Progress in System and Robot Analysis and Control Design, capítulo 20, pp. 243-250.
- [6] Horowitz, I., (1959). "Fundamental theory of linear feedback control systems". *Transactions on Automatic Control*, **4**, pp. 5-19.
- [7] Horowitz, I., (1962). Plant adaptive systems vs ordinary feedback systems. *Ibid.*, **7**, pp. 48-56.
- [8] Horowitz, I., (1963). *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press, New York (EEUU).
- [9] Horowitz, I. (1982). Improved design technique for uncertain multiple-input multiple-output feedback systems. *International Journal of Control*, **36** (6), pp. 977-988.

- [10] Horowitz, I. y C. Loechter (1979). Design of a  $3 \times 3$  multivariable feedback system with large plant uncertainty. *International Journal of Control*, 33 (4), pp. 677-699.
- [11] Houppis, C. H. y S. J. Rasmussen, (2000). Quantitative Feedback Theory, Marcel Dekker, New York (EEUU).
- [12] Iribas, M. (2001). Controlador de vuelo de la maqueta de un helicóptero, mediante técnicas de control robusto QFT, Proyecto de Fin de Carrera presentado en la Universidad Pública de Navarra, Pamplona (España).
- [13] Yaniv, O. (1988). Quantitative design method for MIMO uncertain plants to achieve prescribed diagonal dominant closed-loop minimum phase tolerances. *International Journal of Control*, 27 (2), pp. 519-528.
- [14] Yaniv, O. (1995). MIMO QFT using non-diagonal controllers. *International Journal of Control*, 61 (1), pp. 245-253.
- [15] Yaniv, O. (1999). Quantitative Feedback Design of Linear and Nonlinear Control Systems, Kluwer Academic, Massachusetts (EEUU).