

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TEMPORAL DE UN SISTEMA CON MUESTREO NO CONVENCIONAL BASADO EN EL LUGAR DE RAÍCES

J. Salt, A.Cuenca

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad Politécnica de Valencia

Camino de Vera 14, 46022 Valencia (España)

e-mail: {julian, acuenca}@isa.upv.es

Resumen

En sistemas de tiempo real suelen aparecer retardos en el tratamiento de las distintas señales que intervienen debido, entre otras razones, a la utilización de tareas y medios compartidos. Desde esta óptica parece razonable plantear un estudio de dichos sistemas cuando son muestreados de forma no convencional, con el fin de obtener un entorno de especificaciones alrededor del cual se encontrará el diseño de nuestro sistema de control y, por tanto, establecer la posibilidad de fijar el esquema de muestreo no convencional como un parámetro más de diseño.

Palabras Clave: Sistemas Muestreados Multifrecuencia, Lugar de Raíces, Controladores PID, Sistemas de Tiempo Real.

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El estudio presente surge a partir de la consideración de un sistema de control configurado como se muestra en la figura 1. En ella podemos ver el diagrama de bloques y muestreos de dicho sistema de control para dotarlo de una estructura de control por computador con muestreo no convencional.

El funcionamiento del sistema se describe a continuación: como se puede apreciar en la figura 1 disponemos de un sistema de control donde tanto al regulador como al proceso se les anteponen sendos retenedores de orden cero funcionando a t_0 (el más pequeño de los periodos considerados en el sistema, que coincide con el m.c.d. de todos los periodos involucrados en el mismo). Además la medida del sistema se toma cada T instantes de tiempo, siendo este periodo el mayor de los encontrados en el sistema (lo llamaremos metaperiodo y normalmente coincidirá con el m.c.m. de todos los periodos involucrados en dicho sistema). De la misma forma,

la referencia suministrada al sistema de control estará también muestreada a T , con lo que la entrada de error al regulador vendrá también capturada cada T instantes de tiempo. Por su parte, el muestreador ubicado a la salida del regulador, o lo que es lo mismo, a la entrada del proceso es un muestreador con la capacidad de seleccionar aquellas muestras deseadas, de entre las disponibles a periodo de intermuestreo, dentro de un metaperiodo.

De esta forma, como se plantea en [4], vamos a poder llevar a cabo diferentes esquemas de muestreo en el muestreador de salida del regulador (entrada al proceso) para este sistema de control, de tal forma que nos permitan extraer conclusiones acerca de cómo pueden afectar éstos en la respuesta del sistema y en la ubicación de los polos dentro del plano Z , y por ende, tras una simple transformación, dentro del plano S .

Para poder llevar a cabo todo ello, primero es necesario presentar cómo queda modelado el bucle cerrado del sistema de control. Tras esto, necesitaremos implementar una serie de programas de simulación que ejecuten diversos patrones de muestreo para el modelo considerado.

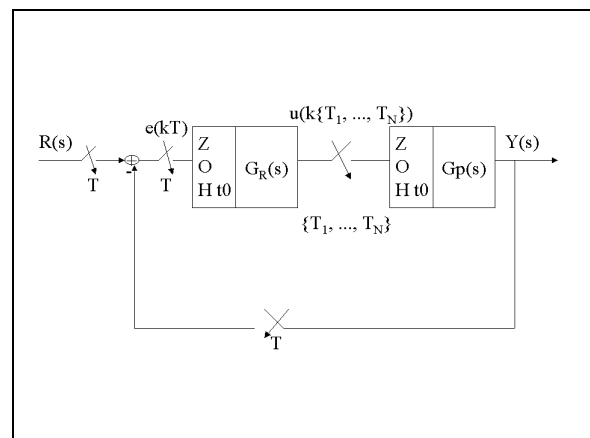


Figura 1: Diagrama de bloques y muestreos

1.1 MODELADO

Para modelar el sistema de control descrito en la figura 1 recurrimos a [1] donde, entre otros, es planteado el modelado de sistemas muestreados multifrecuencia basado en la descomposición vectorial de conexiones [6], en la que se basa la metodología de Kranc [3]. A partir de dicha metodología se desarrollaron una serie de leyes de recurrencia [2] para el caso de muestreo no convencional en el sistema, las cuales nos permiten modelar el sistema al periodo m.c.m. de los existentes en el sistema, o también conocido como metaperiodo, tanto si se le antepone al sistema un retenedor de orden cero (ZOH) como si el caso fuese otro.

En concreto, las leyes de recurrencia obtenidas para el caso de anteponer un ZOH al proceso, lo que se conoce como operador ZOH-Kranc, se van a presentar a continuación, ya que van a ser necesarias para la realización del estudio.

$$(H_0(s)^{t_0} G(s))^{t_0} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^K & A_{11}B & \cdots & A_{1m}B \\ C_1 & D_{11} & \cdots & D_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & D_{n1} & \cdots & D_{nm} \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde

$[A, B, C, D]$: representación interna a t_0 del proceso
 n : muestreos de salida del proceso
 m : muestreos de entrada al proceso
 K : número de muestreos a t_0 en un metaperiodo T.

A partir de (1) se puede ver cómo el modelo interno del sistema de control viene definido por $[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}]$, donde:

$$\bar{A} = A^K \quad (2)$$

$$\bar{B} = [A_{11}B \quad \cdots \quad A_{1m}B] \quad (3)$$

en la que:

$$A_{1j} = \sum_{x=1}^{dif(j)} A^{K-x-\sum_{w=1}^{j-1} dif(w)} \quad (4)$$

siendo dif el vector que incluye la diferencia de tiempos entre instantes de muestreo sucesivos en la entrada.

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde

$$C_i = CA^{salida(i)} \quad (6)$$

siendo $salida$ el vector donde están los instantes en los que hay muestreo en la salida.

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{n1} & \cdots & D_{nm} \end{bmatrix} \quad (7)$$

siendo

$$D_{ij} = C\Psi_{ij}B + \Omega_{ij} \quad (8)$$

$$\Psi_{ij} = \begin{cases} \sum_{x=1}^{dif(j)} A^{salida(i)-x-\sum_{w=1}^{j-1} dif(w)}, & ,salida(i)-x-\sum_{w=1}^{j-1} dif(w) \geq 0 \\ 0, & ,otro\ caso \end{cases} \quad (9)$$

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} D, & \left(salida(i) - dif(j) - \sum_{w=1}^{j-1} dif(w) < 0 \right) \wedge (i \geq j) \\ 0, & \left[\left(salida(i) - dif(j) - \sum_{w=1}^{j-1} dif(w) < 0 \right) \wedge (i \geq j) \right] \wedge \\ & \wedge [(salida(i) = entrada(j+1)) \vee (salida(i) \neq entrada(j))] \\ 0, & \left(salida(i) - dif(j) - \sum_{w=1}^{j-1} dif(w) < 0 \right) \wedge (i < j) \\ 0, & \left(salida(i) - dif(j) - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) \geq 0 \right) \wedge i \geq j \end{cases} \quad (10)$$

A la vez que hemos definido las leyes de recurrencia hemos ido aportando parámetros que son de gran uso a la hora de la implementación (vector de salida, entrada, etc).

Como se puede observar, el modelo está definido a metaperiodo T, pero internamente funciona a intermuestreo t_0 , con el fin de reordenar correctamente las muestras tomadas en el muestreador de salida del regulador (entrada al proceso) en los instantes concretos múltiplos de t_0 dentro del metaperiodo T.

De la misma forma que se expone en [5], vamos a detallar el modelo del sistema de control en bucle cerrado a partir de la consideración de la cadena directa formada por el regulador y el proceso del

sistema de control. Tanto el uno como el otro tendrán un modelo interno definido por el operador ZOH-Kranc de cada uno de ellos (obtenido a partir de las expresiones anteriores), de tal forma que si nombramos con el subíndice p el modelo interno del proceso y con el subíndice R el del regulador, tendremos:

$$x_p((k+1)T) = \bar{A}_p x_p(kT) + \bar{B}_p \begin{bmatrix} u(kT+T_1) \\ u(kT+T_2) \\ \vdots \\ u(kT+T_N) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$y_p(kT) = \bar{C}_p x_p(kT) + \bar{D}_p \begin{bmatrix} u(kT+T_1) \\ u(kT+T_2) \\ \vdots \\ u(kT+T_N) \end{bmatrix}$$

$$x_R((k+1)T) = \bar{A}_R x_R(kT) + \bar{B}_R e(kT)$$

$$\begin{bmatrix} u(kT+T_1) \\ u(kT+T_2) \\ \vdots \\ u(kT+T_N) \end{bmatrix} = \bar{C}_R x_R(kT) + \bar{D}_R e(kT) \quad (12)$$

En las ecuaciones (11) y (12) queda patente la idea de que el modelo se define a metaperiodo T, pero internamente trabaja considerando los diferentes instantes $\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ en los que se produce muestreo dentro del metaperiodo T.

Por último, la unión de los modelos del regulador y proceso nos permite generar el modelo monofrecuencia del sistema completo [5].

$$\begin{bmatrix} x_R((k+1)T) \\ x_p((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_R & 0 \\ \bar{B}_p \bar{C}_R & \bar{A}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_R(kT) \\ x_p(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_R \\ \bar{B}_p \bar{D}_R \end{bmatrix} \cdot e(kT) \quad (13)$$

$$y_p((k+1)T) = [\bar{D}_p \bar{C}_R \quad \bar{C}_p] \cdot \begin{bmatrix} x_R((k+1)T) \\ x_p((k+1)T) \end{bmatrix} + [\bar{D}_p \bar{D}_R] \cdot e(kT)$$

2 EJEMPLO

2.1 ESCENARIO DEL PROBLEMA

A continuación se describen los elementos constituyentes del sistema de control que nos va a

servir para poner en práctica los conceptos teóricos suministrados en el apartado 1.1.

Se cuenta con un regulador PID continuo, que incluye un filtro en la acción derivativa, expresado por:

$$G_R(s) = \left(6 + 9 \frac{1}{s} + 0.6 \frac{s}{0.05s+1} \right) \quad (14)$$

Igualmente contamos con un proceso continuo definido por la siguiente f.d.t.:

$$G_p(s) = \frac{1}{(0.25s+1)(s+1)} \quad (15)$$

Planteados ya los elementos del sistema de control, vamos a tomar un metaperiodo de $T=0.18$ seg y un periodo de intermuestreo de $t_0=0.015$ seg para ejecutar nuestras pruebas. Así, para nuestro caso particular, dispondremos de 12 muestras a t_0 , de las cuales cogemos aquéllas que sean requeridas por nuestro patrón de muestreo.

Por tanto, como ya se comentó en el apartado 1, vamos a poder llevar a cabo diferentes esquemas de muestreo en el muestreador de salida del regulador (entrada al proceso) para este sistema de control, de tal forma que nos permitan extraer conclusiones acerca de cómo pueden afectar éstos en la respuesta del sistema y en la ubicación de los polos.

2.2 MODELADO

Siguiendo las pautas expuestas en el apartado 1.1 llegamos al modelo representado en la figura 2, el cual se reduce a la conexión en serie de dos operadores ZOH-Kranc y la consiguiente realimentación.

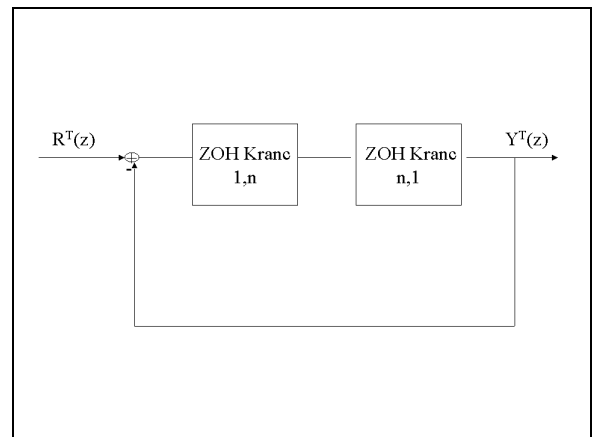


Figura 2: Modelado del sistema

Como se detalla en [1], el modelo de Thompson trabaja con los llamados operadores de Kranc. En

este caso y, como ya se adelantó en el apartado 1.1., se trata de operadores ZOH-Kranc, puesto que tanto el regulador como el proceso anteponen un ZOH en su entrada.

La nomenclatura utilizada en la figura 2 viene a denotar lo siguiente:

- ZOH-Kranc 1,n: operador ZOH-Kranc que tiene una única entrada y n salidas (recordar figura 1).
- ZOH-Kranc n,1: operador ZOH-Kranc que tiene n entradas y una única salida.

Recordar que ambos operadores trabajan internamente al periodo de intermuestreo (t_0), reteniendo las entradas a t_0 y capturando aquellas salidas deseadas múltiplos de t_0 de las disponibles dentro del metaperiodo T .

2.3 IMPLEMENTACIÓN

En lo que respecta a la implementación, hemos generado una macro en MATLAB capaz de obtener la respuesta intermuestreo del sistema, así como el lugar de raíces ante diferentes esquemas de muestreo. Para ello ha sido necesario integrar en dicha macro la generación de los operadores ZOH-Kranc presentados en el apartado 1.1, al igual que la formulación necesaria para considerar en última instancia el sistema en bucle cerrado como un sistema representado en forma monofrecuencial a metaperiodo, la cual también fue presentada en 1.1.

Ya tenemos, por tanto, todo preparado para realizar una batería de pruebas, basadas en la consideración de diferentes esquemas de muestreo (regulares o irregulares) en el muestreador de salida del regulador (entrada al proceso), y tras ello, superponer los diferentes lugares de raíces en un plano Z común correspondiente al metaperiodo (común para todos los casos considerados) que vayamos obteniendo relativos a dichos esquemas en aras a detectar la evolución de los polos del sistema a lo largo del plano Z .

2.4 EXPOSICIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

2.4.1 Caso muestreo regular

Vamos primero a mostrar la superposición de diferentes lugares de raíces en un plano Z referido al metaperiodo cuando tratamos casos de muestreo regular, es decir, casos en los que $T_1 = \dots = T_N = T/N$. El objetivo es analizar la evolución global de los polos del sistema conforme N (multiplicidad) es mayor.

Como queda patente en la figura 3, conforme N va aumentando los polos del sistema se van moviendo por el plano Z describiendo una trayectoria clara. Más concretamente se aprecia que a mayor N menor sobreoscilación cabe esperar en la respuesta del sistema. Sin embargo, si se observa ésta en la figura 4, vemos que en algunos casos esto no es así, lo cual se debe a la influencia de los ceros que surgen del muestreo no convencional del sistema [4]. De igual manera, si observamos la figura 4 podemos comprobar, por ejemplo, la mejoría en el tiempo de establecimiento que se produce a medida que N va aumentando.

2.4.2 Caso muestreo irregular $N=2$

En segundo lugar vamos a considerar el caso de muestreo irregular fijando $N=2$. Para facilitar el análisis consideramos dos subperiodos iguales dentro del metaperiodo, esto es, un subperiodo inicial que va desde el instante 0 seg hasta el 0.09 seg, y un subperiodo final que va desde el instante 0.09 seg al 0.18 seg.

De esta forma, si nos fijamos en la figura 5, se observa la descripción de una trayectoria que une los polos en dos sentidos. El sentido derecho representa el movimiento del muestreo regular hacia posiciones irregulares más cercanas al comienzo del metaperiodo (acortamiento del subperiodo inicial). El sentido izquierdo, por su parte, representa el movimiento del muestreo regular hacia posiciones irregulares más cercanas al final del metaperiodo (acortamiento del subperiodo final).

En la figura 6 mostramos la respuesta del sistema en el caso de acortamiento del subperiodo inicial, comprobándose cómo la respuesta del sistema va sufriendo variaciones significativas según el esquema de muestreo considerado. Así el esquema $[0,0.015]$, esto es, aquél que corresponde al muestreo en el instante 0 seg y en el instante 0.015 seg, ofrece una respuesta parecida (aunque mejor) a la monofrecuencia (que se puede observar en la figura 4) dado que estamos haciendo un muestreo bifrecuencia muy cercano al monofrecuencial, en el sentido de que las dos muestras capturadas se toman juntas y al principio del metaperiodo (en el monofrecuencia se toma una única muestra al principio del metaperiodo). Por su parte, el muestreo irregular $[0,0.06]$ no ofrece mejores resultados, en este caso, con respecto al muestreo regular $[0,0.09]$, ya que para el primero se observa mayor sobreoscilación máxima y mayor tiempo de establecimiento (aunque de forma moderada).

De la figura 7 se pueden deducir prácticamente las mismas conclusiones anteriores, pero ahora para el caso de acortamiento del subperiodo final.

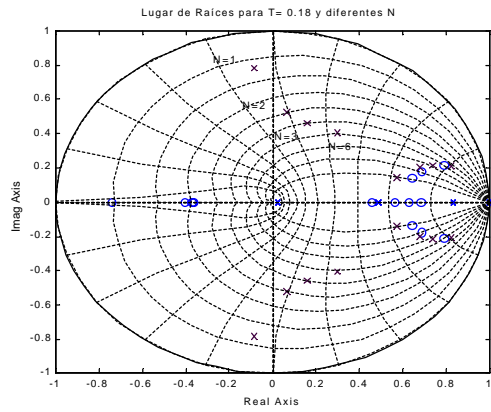


Figura 3: Lugar de Raíces muestreo regular

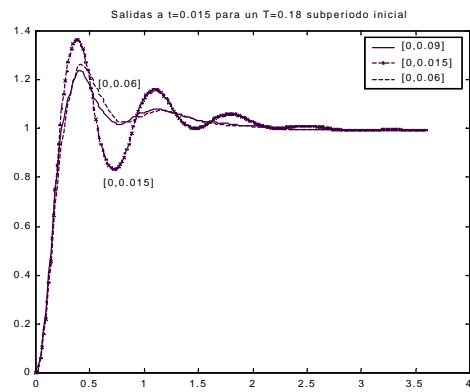


Figura 6: Salida N=2 (irregular) subperiodo inicial

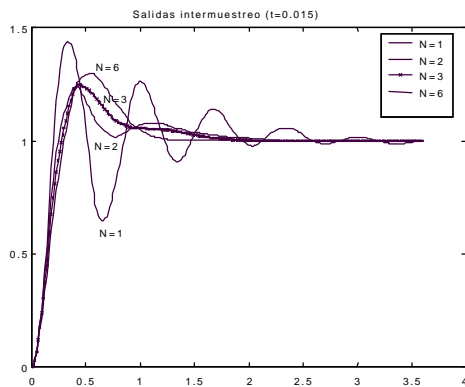


Figura 4: Salida intermuestreo muestreo regular

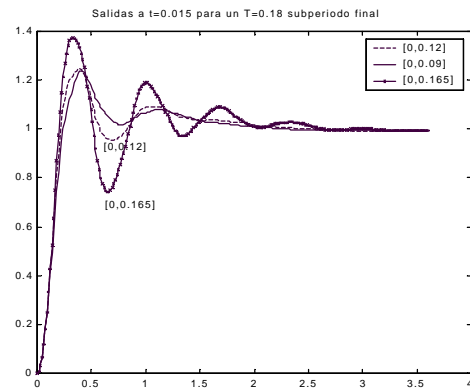


Figura 7: Salida N=2 (irregular) subperiodo final

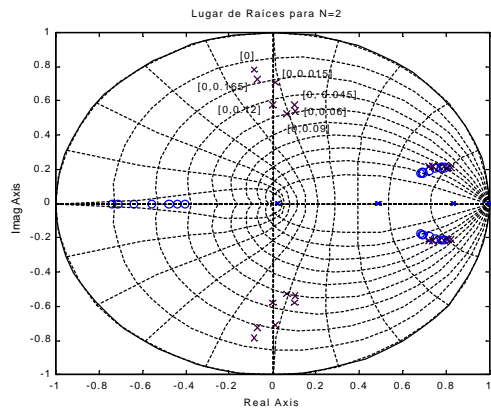


Figura 5: Lugar de Raíces muestreo irregular N=2

2.4.3 Caso muestreo irregular N=3

Finalmente vamos a exponer el caso de muestreo irregular fijando $N=3$. En este caso vamos a observar cómo también se forman unas trayectorias a lo largo del plano Z según se vaya variando el esquema de muestreo en cada subperiodo considerado.

Ahora contamos con tres subperiodos: el inicial (desde 0 hasta 0.06 seg), el medio (desde 0.06 hasta 0.12 seg) y el final (desde 0.12 hasta 0.18 seg).

Como ahora las distancias entre las diferentes ubicaciones de los polos van a ser muy pequeñas expondremos de forma ampliada los diferentes lugares. Así, en la figura 8 mostramos el resultado de acortar tanto el subperiodo inicial (acercándolo hacia el inicio del metaperiodo) como el subperiodo medio (acercándonos hacia el caso regular con $N=2$). En ambos casos, partiendo del caso regular con $N=3$ $[0,0.06,0.12]$ evolucionamos a lo largo del plano Z de forma coherente y, respectivamente, hacia el caso de muestreo irregular con $N=2$ $[0,0.12]$, y el caso de muestreo regular con $N=2$, $[0,0.09]$.

Por su parte, en el caso de acortamiento del subperiodo final, la figura 9 establece claramente la trayectoria descrita por los polos, la cual partiendo del caso regular con $N=3$ va hacia el irregular con $N=2$ $[0,0.06]$.

En cuanto a la respuesta del sistema, como cabía esperar, las variaciones son minúsculas entre los distintos esquemas de muestreo considerados, ya que la ubicación de los polos es muy similar en valor numérico.

Así en la figura 10 se muestra el caso del subperiodo inicial, donde las respuestas con $N=3$ son todas muy parecidas excepto la del caso $[0,0.015,0.12]$, ya que éste se encuentra muy cercano al caso $N=2$ $[0,0.12]$,

el cual ofrece una respuesta con mayores oscilaciones, consecuencia de una menor multiplicidad (como ya se vió en la figura 4).

Lo mismo podemos decir de la figura 11, donde se muestra el caso del acortamiento del subperiodo final, aunque aquí no sea tan visible la diferenciación entre el caso N=3 cercano al N=2, esto es, [0,0.06,0.165], y los demás casos N=3.

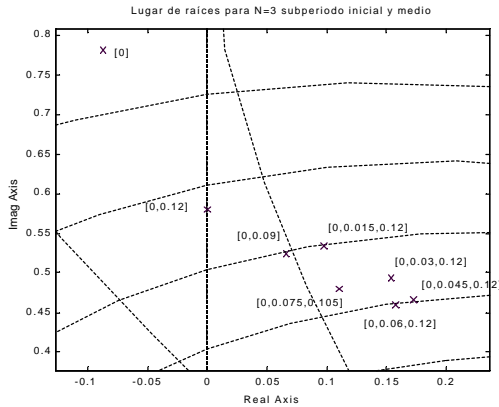


Figura 8: LdR N=3 (irregular) inicial y medio

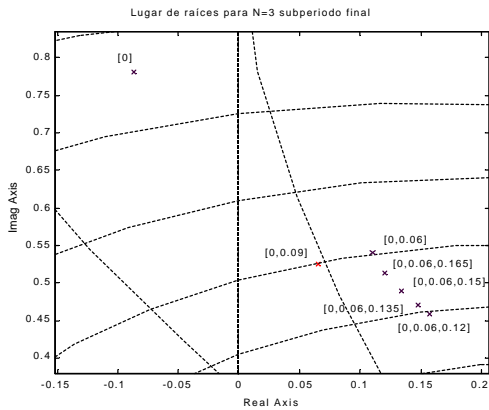


Figura 9: LdR N=3 (irregular) final

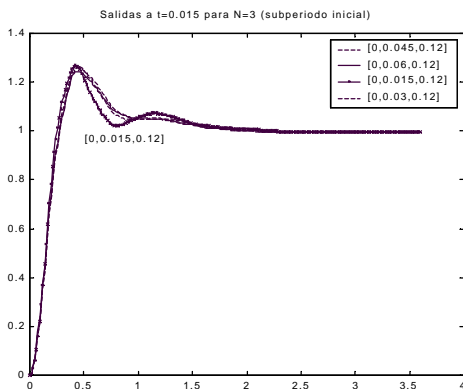


Figura 10: Salida N=3 (irregular) subperiodo inicial

El mismo estudio se ha realizado para el caso de N=6, pero al no arrojar conclusiones diferentes de las expuestas hasta ahora no será incluido.

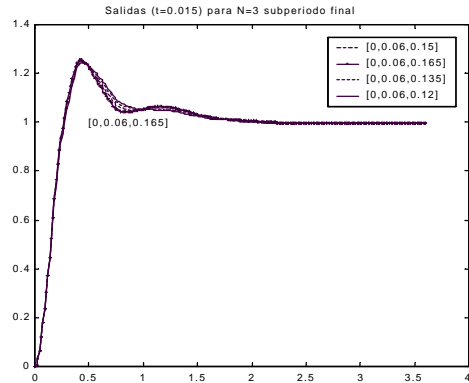


Figura 11: Salida N=3 (irregular) subperiodo final

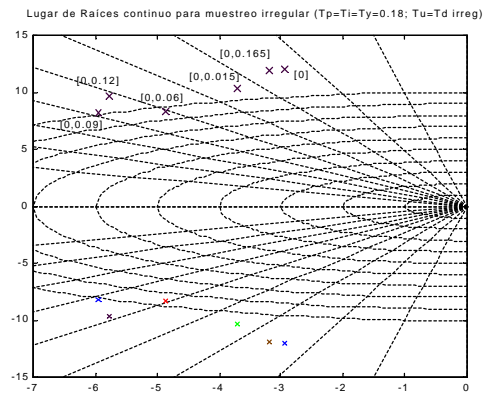


Figura 12: Lugar de Raíces continuo

2.4.4 Transformación al plano S

Es evidente que el plano Z dispone de información acerca del significado relativo a la ubicación de los polos a lo largo del mismo. No obstante, como quiera que el significado físico de las diferentes zonas geométricas del plano S es más intuitivo a la hora de realizar el diseño de los sistemas de control, vamos a hacer una transformación hacia dicho plano utilizando, por ejemplo, el sencillo método de la Transformación Bilineal utilizada en sentido inverso:

$$z \cong \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (16)$$

De esta forma podemos transformar de forma aproximada los polos obtenidos en el plano Z hacia el plano S y ver allí qué características cabe esperar del sistema, según el esquema de muestreo que se haya utilizado.

Así, para el caso de $N=2$ irregular (visto en la sección 2.4.2) obtendríamos el lugar de raíces continuo descrito en la figura 12, donde es fácil comprobar que, por ejemplo, el muestreo $[0,0.165]$ genera un sistema con mayor sobreoscilación y más lento que el generado a partir del esquema $[0,0.12]$ (como podemos comprobar en la figura 7).

3 CONCLUSIONES

En el presente artículo se plantea una forma sencilla de modelar e implementar sistemas con muestreo no convencional. Consecuencia de ello, se obtienen una serie de resultados prometedores relativos a la ubicación de los polos en el plano Z (y su posterior transformación al S), lo cual nos puede ser de gran ayuda a la hora de determinar un entorno de especificaciones alrededor del cual diseñaremos el sistema de control de tiempo real.

Como controlador se ha utilizado un PID con estructura interactiva, pero se podría utilizar cualquier otro, por ejemplo, un PID paralelo multifrecuencia, lo cual haría enriquecer nuestro sistema multifrecuencia, al dotarlo de mayor número de muestreadores y propiciar, por tanto, la posibilidad de extraer conclusiones individuales acerca de la aportación de cada muestreador situado en cada una de las acciones básicas del PID.

Referencias

- [1] Camiña, C., (1999) "Modelado y Respuesta en Frecuencia de los Sistemas Muestreados Multifrecuencia". Tesis Doctoral Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática Universidad Politécnica de Valencia.
- [2] Cuenca, A., (1998) "Técnicas de Simulación en Control Asíncrono basadas en la Metodología de Kranc". Proyecto Final de Carrera Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática Universidad Politécnica de Valencia.
- [3] Kranc, G.M., (1957) "Input-output analysis of multirate feedback systems". *IEEE Trans. On Automatic Control*. Vol. AC-3, pp.21-28.
- [4] Salt, J., (1992) "Control de Procesos Industriales con Muestreo No-convencional". Tesis Doctoral Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática Universidad Politécnica de Valencia.
- [5] Salt, J.; Albertos, P.; Tornero, J.; Ledesma, B., (1994) "Digital Controller Improvement by Multirate Control". *Third IEEE Conference on Control Applications*, Vol 2, pp. 1459-1464.
- [6] Thompson, P.M., (1986) "Gain and phase margins of multirate sampled-data feedback systems". *Int. J. Control*, Vol 44, No. 3, pp. 833-846.